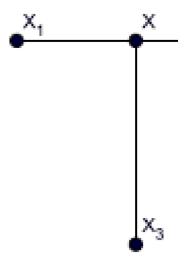
Lösung zu Aufgabe 1

Wir führen den Beweis mittels Widerspruch. Wir nehmen also an, dass es mindestens zwei verschiedene Zahlen unter den 2014 Zahlen gibt. Unter dieser Annahme zeigen wir, dass es keine zwei gleichen Zahlen gibt. Nehmen wir an, es gibt zwei gleiche Zahlen x_1 und x_2 unter den 2014 ganzen Zahlen. Dann existiert eine Zahl x_3, sodass $x_1 = x_2 \neq x_3$ gilt, denn sonst wären alle 2014 Zahlen gleich, was aber ausgeschlossen wurde. Nun bilden wir das arithmetische Mittel diesen drei Zahlen und definieren $x_4 := \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3$. Nach Aufgabenstellung gehört x_4 dann zu den 2014 Zahlen. Nun muss $x_1 = x_2 \neq x_4$ gelten, denn wäre $x_4 = x_1$, dann wäre auch $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 = x_1$, also $x_3 = x_1$, was aber ausgeschlossen wurde. Außerdem kann der Fall $x_4 = x_3$ auch nicht eintreten. Denn wäre $x_4 = x_3$, dann müsste auch $\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 = x_3$ sein, also $x_1 = x_3$, was jedoch ausgeschlossen wurde.

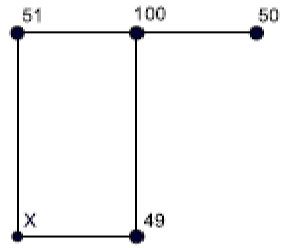
Wir wissen, dass $x_1 = x_2 \neq x_3$, also muss $x_3 \neq \frac{x_1+x_2}{2}$ sein. Wir zeigen nun, dass x_4 echt zwischen $\frac{x_1+x_2}{2} = x_1 = x_2$ und x_3 sein muss. Dies können wir mit Hilfe der Konvexkombination $tx+(1-t)y$ zeigen: Wenn $t = 0$, dann ist $0x + (1-0)y = y$ und wenn $t = 1$, dann ist $1x+(1-1)y = x$, also ist $tx+(1-t)y$ echt zwischen x und y, falls $0 < t < 1$ ist. Nun wählen wir $t = \frac{2}{3}$, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $y = x_3$ und setzen ein. Dann folgt $\frac{2}{3}\frac{x_1+x_2}{2} + (1-\frac{2}{3})x_3 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = x_4$, d.h. x_4 ist echt zwischen $x_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ und x_3. Nun bilden wir das arithmetische Mittel aus den drei Zahlen x_1, x_2 und x_4 und definieren $x_5 := \frac{x_1+x_2+x_4}{3} = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4$. Die neue ausgerechnete Zahl x_5 ist dann echt zwischen $\frac{x_1+x_2}{2}$ und der vorher ausgerechneten Zahl x_4 und muss auch zu den 2014 Zahlen gehören. Dies kann man beliebig oft weiterführen, indem man die neue ausgerechnete Zahl durch die vorherige ausgerechnete Zahl (zu Anfang war es die Zahl x_3) ersetzt und dann das arithmetische Mittel aus diesen drei Zahlen bildet, also $x_n := \frac{x_1+x_2+x_{n-1}}{3}$. Die Zahl x_n ist eine beliebige Zahl, die nach Aufgabenstellung zu den 2014 Zahlen gehört, wobei $n \geq 4$ gilt. So ist die neue ausgerechnete Zahl immer echt zwischen $\frac{x_1+x_2}{2}$ und der vorher ausgerechneten Zahl x_{n-1}. Auch dies kann man mit Hilfe der Konvexkombination zeigen: Sei dazu $t = \frac{2}{3}$, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ und $y = x_{n-1}$. Es folgt nach Einsetzen $\frac{2}{3}\frac{x_1+x_2}{2} + (1-\frac{2}{3})x_{n-1} = \frac{x_1+x_2+x_{n-1}}{3} = x_n$. Da $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = x_{n-1}$ und $\frac{x_1+x_2+x_{n-1}}{3} = x_n$, können wir sagen, dass x_n $(n \geq 4)$ echt zwischen $\frac{x_1+x_2}{2}$ und x_{n-1} sein muss und zu den 2014 ganzen Zahlen gehören muss. Dies kann jedoch nicht sein, da es zwischen $\frac{x_1+x_2}{2} = x_1 = x_2$ und x_3 nicht unendlich viele ganze Zahlen gibt. Damit haben wir gezeigt, dass die 2014 Zahlen alle verschieden sind. Wir nehmen also jetzt an, dass alle Zahlen verschieden sind. Nun sortieren wir alle 2014 Zahlen aufsteigend nach der Größe und bezeichnen diese mit y_1 bis y_{2014}. Es gilt also $y_1 < y_2 < ... < y_{2013} < y_{2014}$. Nun setzen wir $z_1 := \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ und wissen, dass z_1 auch zu den 2014 ganzen Zahlen gehört. Es gilt $\frac{y_1+y_1+y_1}{3} = y_1 < \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = z_1 < \frac{y_3+y_3+y_3}{3} = y_3$, d.h. z_1 liegt zwischen y_1 und y_3. Da y_2 nach Konstruktion und nach unserer Annahme die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft ist, muss notwendigerweise $z_1 = y_2$ gelten. Analog zeigen wir, dass für $z_2 := \frac{y_1+y_2+y_4}{3}$, $z_2 = y_3$ gelten muss: Auch hier gilt $y_2 = z_1 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} < \frac{y_1+y_2+y_4}{3} = z_2 < \frac{y_4+y_4+y_4}{3} = y_4$, sodass $z_2 = y_3$ folgt. Mit der gleichen Argumentation folgt, dass $z_3 := \frac{y_2+y_3+y_4}{3} = y_3$ sein muss. Es gilt also $z_2 = z_3$, was äquivalent ist zu $\frac{y_1+y_2+y_4}{3} = \frac{y_2+y_3+y_4}{3}$ und dies wiederum äquivalent ist zu $y_1 = y_3$. Dies bildet jedoch einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass alle 2014 Zahlen paarweise verschieden sind. Damit haben wir gezeigt, dass alle 2014 Zahlen gleich sein müssen. *Q.E.D.*

Lösung zu Aufgabe 2

Wir führen den Beweis mittels Widerspruch. Wir nehmen also an, dass alle Nummern bzw. Zahlen an den Ecken des Prismas, die durch eine Kante miteinander verbunden sind, sich um mindestens 49 voneinander unterscheiden. Wir sagen ab jetzt, dass eine Zahl ein *Nachbar von der Zahl X* ist, wenn diese Zahl durch eine Kante des Prismas mit X verbunden ist. Wir wissen, dass jede Zahl genau drei Nachbarn hat. Nun gibt es Zahlen, deren Nachbarn eindeutig bestimmt sind (natürlich unter der Annahme, dass sich eine Zahl um mindestens 49 von seinen Nachbarn unterscheidet): Die Zahl 49 muss die Nachbarn 98, 99 und 100 haben; die 50 muss die Nachbarn 1, 99 und 100 haben; die 51 muss die Nachbarn 1, 2 und 100 haben; die 52 muss die Nachbarn 1, 2 und 3 haben. Wir können damit also sehen, dass die Zahl 100 die Nachbarn 49, 50 und 51 hat. Da wir ein Prisma mit einem 50-Eck als Grundflächen haben, gibt es zu jeder Zahl genau einen Nachbar, der sich nicht auf der selben Grundfläche wie die Zahl selbst befindet. Das können wir gut an dieser Skizze sehen:

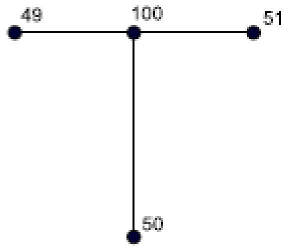


Das heißt, dass entweder die 49, 50 oder 51 nicht auf der gleichen Grundfläche wie die 100 ist. Der erste und dritte Fall können nicht eintreten, denn dann hätten die 49 und die 51 zwei gleiche Nachbarn (eine davon ist die 100), was jedoch nicht sein kann, weil die 51 die Nachbarn 1, 2 und 100 hat und die 49 die Nachbarn 98, 99 und 100. Das können wir gut an dieser Skizze erkennen:

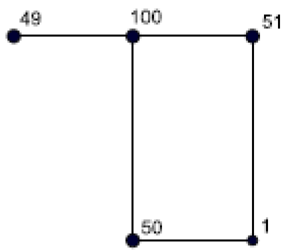


Wir wissen ab jetzt also, dass die 50 nicht auf der gleichen Grundfläche wie die 100 ist. Bevor wir diesen Fall behandeln, zeigen wir vorher noch, dass jede Zahl eindeutig bestimmte Nachbarn hat. Von nun an sagen wir, dass *eine Zahl determiniert ist*, wenn die Nachbarn von dieser Zahl eindeutig bestimmt sind. Wir wissen, dass die Zahlen 49, 50, 51 und 52 determiniert sind. Mit der Zuordnung $X \mapsto (X_1, X_2, X_3)$ meinen wir, dass die Zahl X die Nachbarn X_1, X_2 und X_3 hat. Wir wissen z.B.:
$49 \mapsto (98, 99, 100)$
$50 \mapsto (1, 99, 100)$
$51 \mapsto (1, 2, 100)$
$52 \mapsto (1, 2, 3)$
Man stellt fest, dass für $n \in \{53, 54, ..., 100\}$ nur Nachbarn aus $\{1, 2, ..., n-49\}$ in Frage. Das heißt, für die 53 kommen nur Nachbarn aus $\{1, 2, 3, 4\}$ in Frage, aber die 1 ist schon determiniert (siehe Zuordnungen oben), also folgt $53 \mapsto (2, 3, 4)$. Nun ist also auch neben der 1 auch die 2 determiniert (mit den Nachbarn 51, 52, 53). Für 54 erhalten wir also als mögliche Nachbarn nur Zahlen aus $\{3, 4, 5\}$, also sind das die drei Nachbarn von 54. Nun ist auch noch die 3 determiniert (mit den Nachbarn 52, 53, 54). Wir können offensichtlich ein Muster erkennen: Gehen wir von k zu k+1 über (wobei k aus $\{53, 54, ..., 99\}$), so sind die Zahlen von 1 bis k-51 bereits determiniert, sodass nur die Zahlen $\{k-50, k-49, k-48\}$ als mögliche Nachbarn für k+1 in Frage kommen. Da jede Zahl genau drei Nachbarn hat, sind somit alle Nachbarn von k+1 gefunden, nämlich k-50, k-49 und k-48. Wir sehen also, dass alle Zahlen aus $\{53, 54, ..., 100\}$ determiniert sind und mit diesen Zahlen auch alle Zahlen aus $\{1, 2, ..., 100-51\}$, zusätzlich sind noch die Zahlen 50, 51 und 52 determiniert, wie wir am Anfang gesehen haben, also sind alle Zahlen aus $\{1, 2, ..., 100\}$ determiniert. Jede Zahl ist somit determiniert, hat also eindeutig bestimmte Nachbarn. Aus den Berechnungen oben können wir leicht ableiten, was die Nachbarn

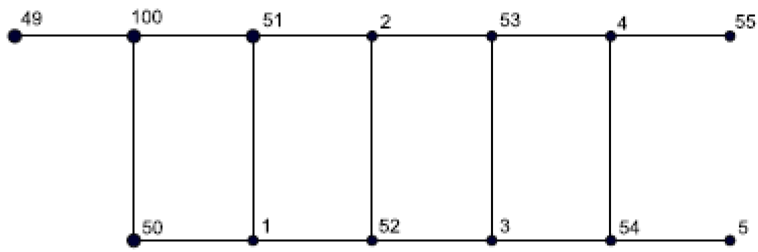
einer Zahl sind: X hat die Nachbarn X+49 (mod 100), X+50 (mod 100) und X+51 (mod 100).
Wir haben schon festgestellt, dass die 50 nicht auf der gleichen Grundfläche wie die 100 ist. Wir bekommen also folgendes Bild:



Die Zahlen 50 und 51 haben zwei gemeinsame Nachbarn, nämlich die 1 und die 100, also bekommen wir folgendes Bild:



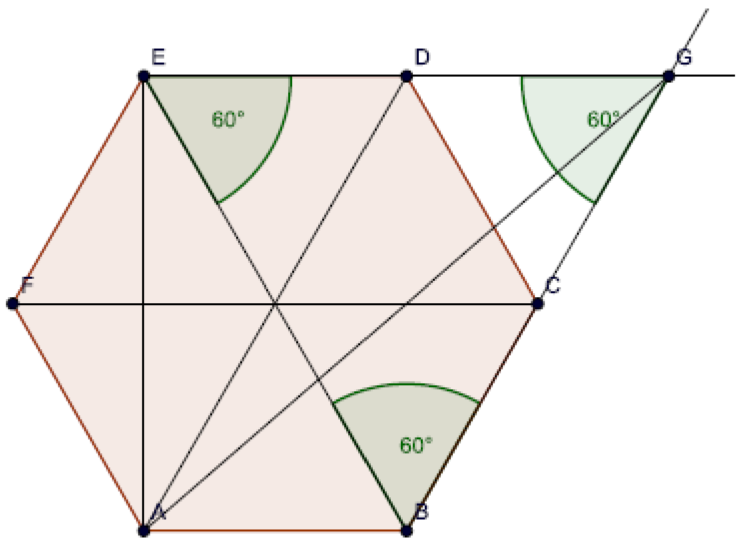
Wir haben schon gezeigt, dass alle Zahlen eindeutige Nachbarn haben. Damit bekommen wir (bis auf Drehung und Spiegelung) mit dem Bild oben eine eindeutige Konstellation der Zahlen an den Ecken des Prismas.



Führt man dieses Bild nach rechts hin weiter, dann kann man gut sehen, dass der untere bzw. obere Nachbar einer Zahl X (siehe Skizze) gerade X+50 (mod 100) ist, der linke Nachbar X+49 (mod 100) und der rechte Nachbar X+51 (mod 100). Das kann auch gezeigt werden: Ist der linke Nachbar von X die Zahl X+49 (mod 100) und der untere Nachbar die X+50 (mod 100), dann muss der rechte Nachbar X+51 (mod 100) sein, da X die Nachbarn X+49 (mod 100), X+50 (mod 100) und X+51 (mod 100) hat. Für das obere Bild stimmt diese Behauptung, also stimmt sie auch für alle nach rechts kommenden Zahlen. Damit bekommen wir die Tatsache, dass rechts von X die Zahl X+51 (mod 100) steht und rechts von X+51 (mod 100) die Zahl (X+51)+51 (mod 100), also X+2 (mod 100). Das heißt aber, dass oben sowohl alle geraden Zahlen als auch alle ungeraden Zahlen stehen, und dass unten sowohl alle geraden als auch alle ungeraden Zahlen stehen (da sowohl unten als auch oben zumindest eine gerade und eine ungerade Zahl steht; siehe Skizze). Dies führt zu einem Widerspruch, weil alle Zahlen nicht gleichzeitig oben und unten stehen können. *Q.E.D.*

Lösung zu Aufgabe 3

Zuerst ziehen wir die drei Diagonalen AD, BE und CF im regelmäßigen Sechseck.



Nun haben wir das regelmäßige Sechseck in sechs Dreiecke geteilt. Da jeder Winkel des regelmäßigen Sechsecks 120° beträgt und wir sie jeweils mit den Diagonalen AD, BE und CF halbiert haben, hat jeder Winkel in den neu entstandenen Dreiecken einen Winkel von 60°. Da eine Seite des gleichseitigen Dreiecks 1 ist, müssen die anderen Seiten auch 1 sein. Demnach sind alle Dreiecke deckungsgleich. Also gilt notwendigerweise $\mid \overline{AD} \mid = \mid \overline{BE} \mid = \mid \overline{CF} \mid = 1 + 1 = 2$. Von nun an arbeiten wir mit dem Satz des Pythagoras. Zunächst ziehen wir die Diagonale AE (siehe Abbildung). Da sie orthogonal zu $\overline{AB}$ ist, ist das Dreieck ABE ein rechtwinkliges Dreieck. Also ist $\mid \overline{AE} \mid^2 + \mid \overline{AB} \mid^2 = \mid \overline{BE} \mid^2$ (nach Pythagoras). Nach Aufgabenstellung ist $\mid \overline{AB} \mid = 1$ und wie wir schon gezeigt haben ist $\mid \overline{BE} \mid = 2$. Nun setzen wir dementsprechend ein und lösen die Gleichung nach $\overline{AE}$ auf. Also $\mid \overline{AE} \mid^2 + 1^2 = 2^2$. Diese Gleichung hat die Lösung $\mid \overline{AE} \mid = \sqrt{3}$. Wenn wir die Seite ED über D hinaus verlängern und die Seite BC über C hinaus verlängern, haben die beiden Strahlen einen gemeinsamen Schnittpunkt, da die Strahlen nicht parallel zueinander sind und nicht aufeinander liegen (siehe Abbildung). Den neuen Schnittpunkt bezeichnen wir mit G. Somit entsteht das neue Dreieck BGE. Da wir schon zwei Winkel gegeben haben, einmal

$\measuredangle GBE = 60°$ und $\measuredangle BEG = 60°$ können wir den dritten Winkel mit Hilfe des Innenwinkelsatzes eines Dreiecks ausrechnen. Also $\measuredangle EGB = (3-2) \cdot 180° - 60° - 60° = 60°$ (nach Euklid), somit ist dies auch ein gleichseitiges Dreieck, deshalb sind hier die Seitenlängen alle 2, da $\mid \overline{BE} \mid = 2$. Verbinden wir die Punkte G und A entsteht ein neues rechtwinkliges Dreieck AGE, da die Strecke EG orthogonal zur Strecke AE ist, demnach ist $\mid \overline{AE} \mid^2 + \mid \overline{EG} \mid^2 = \mid \overline{AG} \mid^2$. Wie wir wissen ist $\mid \overline{AE} \mid = \sqrt{3}$ und $\mid \overline{EG} \mid = 2$, also ist $\overline{AG}$ nach Auflösung der Gleichung $\sqrt{7}$. *Q.E.D.*

Lösung zu Aufgabe 4

Wir müssen alle natürlichen Zahlen n finden, sodass die Zahl $\frac{4n+1}{n(2n-1)}$ eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung hat. Wir verwenden die Tatsache, dass eine rationale Zahl eine abbrechende Dezimalbruchentwicklung hat, wenn der Nenner nur aus den Primfaktoren 2 und 5 besteht. Zuerst betrachten wir die gemeinsamen Teiler von dem Zähler und dem Nenner von $\frac{4n+1}{n(2n-1)}$. Es ist
ggT($4n+1$, $n(2n-1)$)=ggT($4n+1$, $2n-1$)=ggT($4n+1, 3$).
Also ist der größte gemeinsame Teiler des Nenners und des Zählers entweder 3 oder 1. Daraus folgt, dass der Nenner die Form $2^k \cdot 3^e \cdot 5^l$ mit $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $e \in \{0, 1\}$ haben muss, denn sonst wäre die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{4n+1}{n(2n-1)}$ nicht abbrechend. Dabei ist e genau dann gleich 1, wenn der Zähler $4n+1$ durch 3 teilbar ist. Nun folgt aus $ggT(4n+1, n) = 1$ notwendig $3 \nmid n$, mit $2 \nmid (2n-1)$ folgt $2^k \mid n$, und mit $ggT(n, 2n-1) = 1$ und $n \leq 2n-1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt $5^l \mid (2n-1)$, falls $k \geq 2$ ist. Daraus folgt $n = 2^k$ und $2n-1 = 3^e \cdot 5^l$, aber nur unter der Annahme, dass $k \geq 2$ ist. Ab jetzt an sei $k \geq 2$, da wir die restlichen Fälle dann einfach am Ende durch Einsetzen überprüfen können.
Aus $n = 2^k$ und $2n-1 = 3^e \cdot 5^l$ folgt $2^{k+1} - 1 = 3^e \cdot 5^l$, wobei $2^{k+1} \geq 2^3 \geq 3$ ist, womit wir $l \geq 1$ bekommen. Dann muss aber $2^{k+1} \equiv 1 \pmod 5$ gelten. Wenn man sich jetzt die Reste anschaut, die eine Zweierpotenz modulo 5 lässt, so sehen wir, dass sich diese Reste periodisch wiederholen. Das kann man auch zeigen: $2^0 \equiv 1 \pmod 5$, $2^1 \equiv 2 \pmod 5$, $2^2 \equiv 4 \pmod 5$, $2^3 \equiv 3 \pmod 5$, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, woraus $2^{4s+7} = 2^{4s} \cdot 2^t = 16^s \cdot 2^t \equiv 1^s \cdot 2^t = 2^t \pmod 5$ $\forall s \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ folgt.
Hieraus folgt, dass $k+1 = 4s$ mit $s \in \mathbb{N}$ gelten muss. Dann ist $2^{4s} - 1 = 3^e \cdot 5^l$, also ist: $2^{4s} - 1 = 16^s - 1 = 4^{2s} - 1 = (4^s)^2 - 1 = (4^s + 1) \cdot (4^s - 1) = 3^e \cdot 5^l$. Ferner gilt $4^s - 1 \equiv 1^s - 1 = 0 \pmod 3$ $\forall s \in \mathbb{N}$, womit $e = 1$ sein muss, womit wir $(4^s+1) \cdot (4^s-1) = 3^e \cdot 5^l$ bekommen. Es ist aber $4^s - 1 < 4^s + 1$ und $ggT(4^s+1, 4^s-1) = ggT(4^s+1, 2) = 1$, und deshalb muss notwendig $4^s - 1 = 3$ und $4^s + 1 = 5^l$ gelten, also $s = 1$ und $l = 1$. D.h. für $k \geq 2$ erhalten wir $n = 8$, für $k = 1$ erhalten wir $n = 2$ und für $k = 0$ erhalten wir $n = 1$. Überprüfen wir jetzt diese Werte: $\frac{4 \cdot 8+1}{8 \cdot (2 \cdot 8-1)} = \frac{33}{8 \cdot 15} = \frac{11}{2^3 \cdot 5}$, $\frac{4 \cdot 2+1}{2 \cdot (2 \cdot 2-1)} = \frac{9}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}$, $\frac{4 \cdot 1+1}{1 \cdot (2 \cdot 1-1)} = \frac{5}{1} = 5$, also alles Zahlen mit einer abbrechenden Dezimalbruchentwicklung. *Q.E.D.*