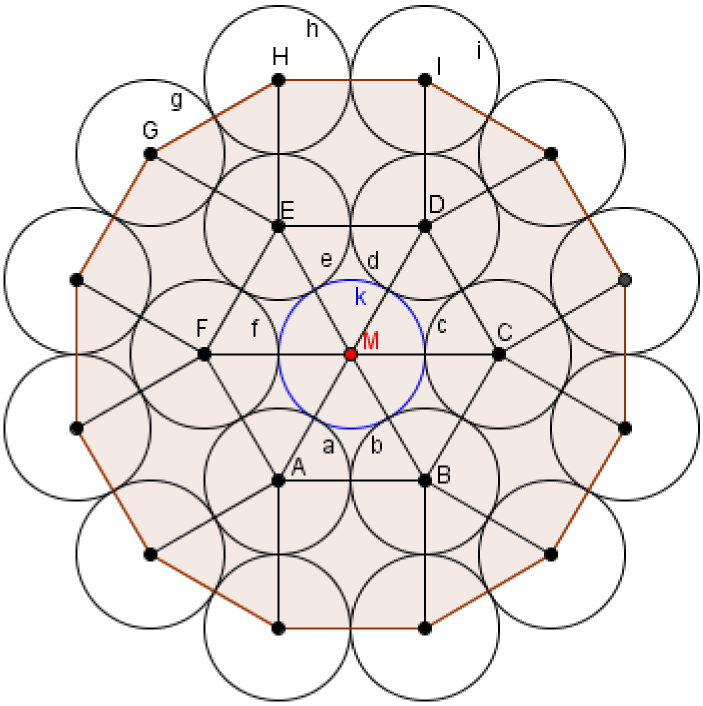
Hilfsmittel

GeoGebra, Paint

Lösung zu Aufgabe 1

Sei r der Radius der Münzen. Ohne Weiteres können wir sofort einsehen, dass die Länge der Strecke, zwischen den Mittelpunkten zweier Münzen, die sich tangieren, gleich $2r$ ist.
Insbesondere bilden die Mittelpunkte dreier Münzen, die sich paarweise tangieren ein gleichseitiges Dreieck, da alle Seiten gleich $2r$ sind.
Im Folgenden greifen wir auf folgende Abbildung zurück:



Wir zeigen, dass wir um eine einzige Münze sechs weitere Münzen anfügen können, sodass die Mittelpunkte der sechs äußeren Münzen ein regelmäßiges Sechseck ergeben. An diesen sechs Münzen fügen wir jeweils zwei Münzen an, sodass die Mittelpunkte der äußersten zwölf Münzen ein regelmäßiges Zwölfeck ergeben (wie in der Abbildung zusehen ist).

Regelmäßiges Sechseck:
Wir betrachten als erstes eine Münze k mit Mittelpunkt M (siehe Abbildung). Wir legen die beiden Münzen e und d mit deren Mittelpunkte E bzw. D so an k, sodass jede Münze die beiden anderen Münzen tangiert. Nun ist $|ME| = |ED| = |DM| = 2r$, folglich ist $\triangle EMD$ gleichseitig. Also ist $\measuredangle DME = 60°$ und da $60°$ ein sechstel eines Vollwinkels (eines Kreises) entsprechen, brauchen wir sechs weitere gleichseitige Dreiecke, sodass ein Vollwinkel bzw. vollständiger Kreis entsteht. Folglich können wir genau sechs Münzen an eine Münze legen, wie in der Abbildung zu sehen ist.
Nun sind an jeder Ecke des Sechsecks zwei $60°$-Winkel ($= 120°$), was der Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks ist, da
$\frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120°$.

Regelmäßiges 12-Eck:
Wir betrachten die Münze e, d, f und eine Münze x, mit Mittelpunkt X; diese Münze legen wir an e.
Wir zeigen, dass $60° \leq \measuredangle DEX \leq 180°$ gilt:
Beweis:
Das Minimum wird offensichtlich dann angenommen, wenn x die beiden Münzen e und d tangiert und das Maximum, wenn x die beiden Münzen e und f tangiert. Im ersten Fall ist $\triangle EDX$ gleichseitig, also folgt sofort $\measuredangle DEX = 60°$. Im zweiten Fall ist $\triangle FEX$ gleichseitig, also $\measuredangle DEX = 360° - \measuredangle XED = 360° - \measuredangle XEF - \measuredangle FEM - \measuredangle MED = 360° - 3 \cdot 60° = 180°$.
Q.e.d.
Also kann $\measuredangle DEX$ den Wert $90°$ annehmen. (1)

Kommen wir nun zur *Konstruktion* des regelmäßigen 12-Ecks:
Wir legen an e die Münze h mit Mittelpunkt H an, sodass $\overline{HE} \perp \overline{ED}$, also $\measuredangle DEH = 90°$, was nach (1) möglich ist (siehe Abbildung).
Ferner ist $\measuredangle HEF = 360° - \measuredangle FEH = 360° - \measuredangle FEM - \measuredangle MED - \measuredangle DEH = 360° - 2 \cdot 60° - 90° = 150°$. Also können wir noch eine Münze g an h und e anlegen (siehe Abbildung). Dann ist $\triangle HGE$ gleichseitig. Also ist $\measuredangle GEF = 360° - \measuredangle FED - \measuredangle DEH - \measuredangle HEG = 360° - 120° - 90° - 60° = 90°$, also ist $\overline{GE} \perp \overline{EF}$.
An d legen wir nun eine Münze i mit Mittelpunkt I, sodass $\overline{ID} \perp \overline{ED}$. Aus Symmetriegründen folgt, dass sich h und i tangieren. Also ist das Viereck $EDIH$ ein Quadrat, da alle Seiten gleich $2r$ sind und $\measuredangle DEH = \measuredangle IDE = 90°$.
Wiederholen wir diesen Vorgang so oft, sodass an jeder äußeren

Münze des Sechsecks zwei Münzen sind erhalten wir obiges Bild. Nun ist jeder Innenwinkel gleich $60° + 90° = 150°$, was der Innenwinkel eines regelmäßigen 12-Ecks ist, da $\frac{(12-2)\cdot 180°}{12} = 150°$. Nun ist jede Seitenlänge des 12-Ecks gleich $2r$, da r eine beliebige positive reelle Zahl ist, gilt dies für alle regelmäßigen 12-Ecke.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 2

a)

Zunächst wird mittels Induktion folgendes Lemma gezeigt:
Lemma: Die Summe der ersten n geraden Zahlen > 0 ist $n^2 + n$;
Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen > 0 ist n^2.
Beweis:
Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Es gilt $1^2 + 1 = 2$ bzw. $1^2 = 1$.
Induktionsannahme: Es sei die Behauptung für n bereits bewiesen, es gelte also $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$ bzw. $\sum\limits_{m=1}^{n} (2m-1) = n^2$.
Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für $(n+1)$. Zu zeigen ist also, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 2k = (n+1)^2 + (n+1)$ bzw. $\sum\limits_{m=1}^{n+1} (2m-1) = (n+1)^2$ gilt.
Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k = \sum_{k=1}^{n} 2k + (2n+2) = (n^2+n) + (2n+2) = (n+1)^2 + (n+1);$$
$$\sum_{m=1}^{n+1} (2m-1) = \sum_{m=1}^{n} (2m-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Q.e.d.
Kommen wir zur ursprünglichen Aufgabenstellung. Hierzu sei n die Anzahl der geraden Zahlen und m die Anzahl der ungeraden Zahlen, also ist $n + m = 335$. Wir definieren
$s(n,m) := \sum\limits_{k=1}^{n} 2k + \sum\limits_{k=1}^{m} (2k-1) = (n^2+n) + m^2 = n \cdot (n+1) + m^2$;
dies ist nun die minimale Summe der 335 Zahlen, da wir für das Minimum die ersten n geraden Zahlen und die ersten m ungeraden Zahlen aufsummieren müssen. Nun gilt folgende Ungleichungskette (da wir stets eine gerade Zahl durch eine kleiner ungerade Zahl ersetzen!): $s(335,0) > s(334,1) > ... > s(317,18) > s(316,19) = 316 \cdot 317 + 19^2 = 100.172 + 361 > 100.000$. Folglich kann die Anzahl der ungeraden Zahlen nicht unter 20 liegen, denn dann wäre die Summe stets größer als 100.000. Hier nun ein Beispiel für $m = 20$:
$\sum\limits_{k=1}^{315} 2k + (\sum\limits_{m=1}^{19} 2m-1) + 99 = 315 \cdot 316 + 19^2 + 99 = 99.540 + 361 + 99 = 100.000$. Folglich liegt das Minimum der Anzahl der ungeraden Zahlen bei 20.

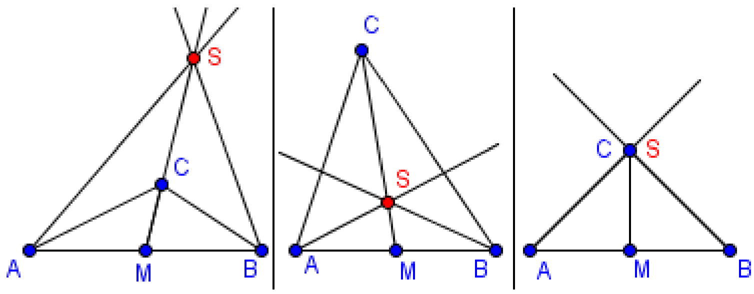
b)

Statt das Maximum der Anzahl der ungerade Zahlen herauszufinden, finden wir das Minimum der Anzahl der geraden Zahlen heraus.
Nehme an m sei ungerade, also gleich $(2k+1)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.
Es gilt dann $100.000 \equiv n \cdot 0 + m \cdot 1 = 0 + (2k+1) \cdot 1 \equiv 1 \pmod 2$, Widerspruch dazu, dass $100.000 \equiv 0 \pmod 2$ gilt. Also ist m gerade und da $m + n = 335$ gilt, ist n ungerade. Nun gilt folgende Ungleichungskette (da wir stets eine ungerade Zahl durch eine kleiner gerade Zahl ersetzen!):
$s(0,335) > s(1,334) > ... > s(18,317) > s(19,316) = 19 \cdot 20 + 316^2 = 380 + 99856 > 100.000$. Folglich kann die Anzahl der geraden Zahlen nicht unter 20 liegen, denn dann wäre die Summe stets größer als 100.000. Da n ungerade ist kann sie auch nicht gleich 20 sein. Hier nun ein Beispiel für $n = 21$:
$\sum\limits_{k=1}^{20} 2k + (\sum\limits_{m=1}^{314} 2m - 1) + 984 = 20 \cdot 21 + 314^2 + 984 = 420 + 98.596 + 984 = 100.000$. Folglich liegt das Maximum der Anzahl der ungeraden Zahlen bei $335 - 21 = 314$.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 3

Wie in der Aufgabenstellung betrachten wir ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Mittelpunkt M der Seite AB. Dies impliziert $|AM| = |MB|$ (1). An den Strahl $[AB$ wird in A der Winkel $\measuredangle ACM$ angetragen (2), an den Strahl $[BA$ in B der Winkel $\measuredangle MCB$ (3); dabei wir die Drehrichtung jeweils so gewählt, dass die freien Schenkel auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C liegen.
Mit den Voraussetzungen (1), (2) und (3) soll man zeigen, dass sich die Strahlen und die Gerade CM in einem Punkt S schneiden.
Zur Veranschaulichung betrachten wir folgende drei Abbildung, da es drei mögliche Lagen für den Schnittpunkt S gibt (echt außerhalb, echt innerhalb oder auf dem Dreieck):



Wir zeigen stattdessen:
Sei S der Schnittpunkt des Strahls $[AB$ und der Geraden CM. Nun sei $[BS$ der Strahl, der von B aus durch S geht. Wir zeigen nun, dass der Strahl $[BS$ mit dem Strahl $[BA$ zusammenfällt (also dass sie gleich sind), wenn dies gilt, dann haben wir gezeigt, dass sich die Strahlen $[AB$ und $[BA$ und die Gerade CM immer in einem Punkt S schneiden.
Hierzu müssen wir $\measuredangle SBM = \measuredangle MCB$ zeigen, denn $[BA$ wurde mit dem Winkel $\measuredangle MCB$ an B angetragen und wenn der Strahl $[BS$ mit dem selben Winkel an B angetragen wurde, dann fallen die beiden Strahlen zusammen.
(2) impliziert $\measuredangle MAS = \measuredangle ACM$ $(2')$ bzw. für einen Punkt D auf $[AB$ $\measuredangle MAD = \measuredangle ACM$ $(2'')$.
Wir müssen als erstes beweisen, dass sich der Strahl $[AB$ mit der Geraden CM überhaupt schneidet, sodass ein Schnittpunkt S entsteht; dies beweisen wir durch einen Widerspruch:
Nehme an $[AB$ sei parallel zur Geraden CM und sei D irgendein

Punkt auf $[AB$, dann gilt $\measuredangle BMC = \measuredangle MAD \overset{(2'')}{=} \measuredangle ACM$ (4), doch da $\measuredangle BMC$ der Außenwinkel von $\triangle ACM$ ist, gilt auch $\measuredangle BMC = \measuredangle MAC + \measuredangle ACM$ (5). Mit (4) folgt also $\measuredangle MAC = 0$, was aber nicht sein kann, da C nicht auf der Geraden AB liegt. Also schneiden sich der Strahl $[AB$ und die Gerade CM immer in einem Punkt S.
Ferner ist der Schnittpunkt S immer auf der gleichen Seite von AB wie der Punkt C, da mit (5) $\measuredangle ACM < \measuredangle BMC$ folgt.
Kommen wir zur unserer ursprünglichen Aufgabe. Hierzu betrachten wir zwei Fälle:
1. Fall: Der Schnittpunkt S liegt auf dem Dreieck (dritte Abbildung).
Da die Gerade CM das Dreieck $\triangle ABC$ in C und M schneidet und ferner S der Schnittpunkt der Geraden CM und $[AB$ ist folgt, dass S und C zusammenfallen (S ist also gleich C). Hieraus folgt unmittelbar, dass $[AB$ durch den Eckpunkt C geht, folglich gilt $\measuredangle MAC = \measuredangle ACM$. Also ist $\triangle AMC$ gleichschenklig zur Basis AC. Es gilt somit $|CM| = |AM| \overset{(1)}{=} |MB|$. Das Dreieck MBS ist also gleichschenklig zur Basis CB, folglich gilt $\measuredangle SBM = \measuredangle MCB$.
2. Fall: Der Schnittpunkt S liegt echt außerhalb oder echt innerhalb des Dreiecks (erste und zweite Abbildung).
Hier zeigen wir, dass $\triangle MBC$ ähnlich zu $\triangle MBS$ ist. Wenn sie ähnlich sind, dann muss $\measuredangle SBM = \measuredangle MCB$ gelten, da $\measuredangle BMC = \measuredangle BMS$ und $\measuredangle SBM \neq CBM$ (da S nicht auf der Geraden CB liegt, denn S liegt auf der Geraden CM, die die Gerade CB nur einmal in C schneidet und nach Annahme liegt S nicht auf dem Dreieck). Wir zeigen, dass $\frac{|MB|}{|SM|} = \frac{|MC|}{|BM|}$ gilt, nach der *Umkehrung des Ähnlichkeitssatzes* (9. Klasse) sind die Dreiecke $\triangle MBC$ und $\triangle MBS$ dann ähnlich. Die Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle AMS$ sind nun ähnlich, da $\measuredangle MAC = \measuredangle ASM$ und $\measuredangle CMA = \measuredangle SMA$. Folglich gilt die Beziehung $\frac{|AM|}{|SM|} = \frac{|MC|}{|MA|}$; mit (1) folgt nun die äquivalente Aussage $\frac{|MB|}{|SM|} = \frac{|MC|}{|BM|}$. Somit sind die Dreiecke $\triangle MBC$ und $\triangle MBS$ tatsächlich ähnlich, insbesondere gilt $\measuredangle SBM = \measuredangle MCB$.

□

Lösung zu Aufgabe 4

Ein Mitglied, dass mit allen Mitgliedern befreundet ist nennen wir *beliebt*. Wir bezeichnen die Mitglieder mit $M_1, M_2, ..., M_n$, wobei aus der Aufgabenstellung hervorgeht, dass $n \geq 4$ gilt. Wir behaupten, dass unter vier Mitgliedern immer ein *beliebtes* Mitglied ist. Für den Fall $n = 4$ ist es nach Annahme erfüllt.
Den Beweis führen wir mittels vollständiger Induktion über $n \geq 5$.
Induktionsanfang: Sei $n = 5$. Dann betrachten wir folgende Mengen: $A = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, $B = \{M_1, M_2, M_3, M_5\}$,
$C = \{M_1, M_2, M_4, M_5\}$ und $D = \{M_1, M_3, M_4, M_5\}$.
Wir zeigen, dass ein *beliebtes* Mitglied existiert; wenn wir nun die anderen vier Mitglieder betrachten, dann ist einer dieser vier Mitglieder mit den anderen drei Mitgliedern befreundet und sogar mit dem *beliebten* Mitglied, daraus folgt, dass dieses Mitglied auch *beliebt* ist und nach dem Schubfachprinzip gibt es dann immer unter vier Mitgliedern ein *beliebtes* Mitglied.
Nach der Aufgabenstellung ist ein Mitglied in A mit allen anderen Mitglieder in A befreundet; o.B.d.A. sei dies das Mitglied M_1. Nun betrachten wir B und machen folgende Fallunterscheidungen:
Fall 1: Wenn M_1 oder M_5 mit allen Mitgliedern in B befreundet ist, dann ist M_1 *beliebt*.
Fall 2: Sei nun M_2 mit allen Mitgliedern aus B befreundet, dann betrachten wir C. Dies unterteilen wir wieder in zwei Fälle.
Fall 2.1: Wenn nun M_1 oder M_5 mit allen Mitgliedern aus C befreundet ist, dann folgt, dass M_1 *beliebt* ist.
Fall 2.2: Wenn nun M_2 oder M_4 mit allen Mitgliedern aus C befreundet ist, dann ist M_2 *beliebt*.
Fall 3: Sei nun M_3 mit allen Mitgliedern aus B befreundet, dann betrachten wir D. Dies unterteilen wir wieder in zwei Fälle.
Fall 3.1: Wenn nun M_1 oder M_5 mit allen Mitgliedern aus D befreundet ist, dann folgt, dass M_1 *beliebt* ist.
Fall 3.2: Wenn nun M_3 oder M_4 mit allen Mitgliedern aus D befreundet ist, dann folgt, dass M_3 *beliebt* ist.
Also gibt es immer (mindestens) zwei *beliebte* Mitglieder unter den fünf Mitgliedern.
Induktionsannahme: Es sei die Behauptung für n Mitglieder bereits bewiesen. Es gelte also, dass unter vier Mitgliedern immer ein *beliebtes* Mitglied ist. Hierzu müssen also (mindestens) $(n-3)$ *beliebte* Mitglieder unter n Mitgliedern existieren.

Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für $(n+1)$ Mitglieder. Zu zeigen ist also, dass unter vier Mitgliedern, aus den $(n+1)$ Mitgliedern, immer ein *beliebtes* Mitglied existiert.
Wir betrachten alle möglichen Mengen, welche n verschiedene Mitglieder enthält; es gibt $\binom{n+1}{n} = (n+1)$ solcher Mengen, mit jeweils n (verschiedenen) Mitgliedern (dies folgt aus der kombinatorischen Bedeutung des *Binomialkoeffizienten*: Es gibt $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten k Objekte aus n Objekten zu ziehen).
Nach der Induktionsannahme gibt es also in **jeder Menge** $(n-3)$ Mitglieder, die mit allen anderen Mitglieder in der **selben Menge** befreundet sind. Also ist ein Mitglied, dass mit allen Mitgliedern einer Menge befreundet ist, mit $(n-1)$ von n (ohne das Mitglied selbst) Mitgliedern befreundet; so ein Mitglied nennen wir *fast beliebt*.
Es gibt also $(n+1) \cdot (n-3)$ *fast beliebte* Mitglieder. Es gilt nun $(n+1) \cdot (n-3) > (n+1) \Leftrightarrow n > 4$, was nach Annahme stimmt.
Also ist die Anzahl der *fast beliebten* Mitglieder größer als die gesamt Anzahl aller Mitglieder, was nicht sein kann. Folglich muss mindestens ein Mitglied mit allen Mitgliedern aus mindestens **zwei verschiedenen Mengen** befreundet sein; dann folgt sofort, dass dieses Mitglied *beliebt* ist und unmittelbar mit der Induktionsannahme, dass $(n-3)$ weitere Mitglieder *beliebt* sind. Insgesamt haben wir dann $(n-2)$ *beliebte* Mitglieder von $(n+1)$ Mitgliedern. Nach dem Schubfachprinzip ist dann immer unter vier Mitgliedern ein Mitglied, dass *beliebt* ist.

$\square$