Hilfsmittel

GeoGebra, Paint, wikipedia.org (Inkreis)

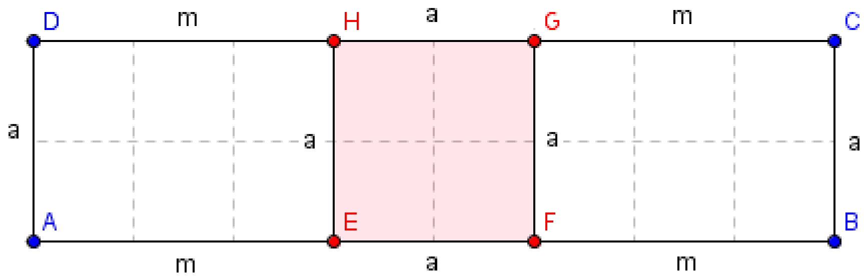
Bemerkung: Im Folgenden sei mit $\mathbb{N}$ immer die Menge $\{1, 2, 3, ...\}$ gemeint und mit $\mathbb{N}_0$ die Menge $\{0, 1, 2, ...\}$.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir drücken ein Rechteck mit der Höhe x und der Breite y aus durch $R(x \times y)$. Im Folgenden sei also $R(a \times b)$ das in der Aufgabenstellung gegebene Rechteck.
Wir nennen zwei Rechtecke $R(x_1 \times y_1)$ und $R(x_2 \times y_2)$ für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ *gleich*, wenn sie deckungsgleich sind (also entweder wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ oder wenn $x_1 = y_2$ und $x_2 = y_1$) und wenn an ihnen exakt die selben Färbungen vollzogen wurden.
Ein *Zug* sei hier eine Färbung eines Quadrats, welches aus einem oder mehreren bislang noch ungefärbten Einheitsquadraten dieses Rechtecks besteht.

O.B.d.A. sei $b > a$, denn im Fall $a > b$ drehen wir das Rechteck um 90° und erhalten das *gleiche* Rechteck $R(b \times a)$ und im Fall $a = b$ färbt Anja das ganze Quadrat $R(a \times a)$, sodass Bernd keinen Zug mehr vollziehen kann und das Spiel verliert.
Nach Aufgabenstellung sind a und b gerade, d.h. es gibt eine positive ganze Zahl k mit $a = 2k$. Des Weiteren können wir b durch $a + 2m \ \forall m \in \mathbb{N}$ ausdrücken, also $b = a + 2m = 2k + 2m = 2 \cdot (k + m)$ (1), was die Bedingungen an b erfüllt, denn sie ist zum einen gerade und zum einen nimmt sie jede gerade natürliche Zahl größer a an.
Nun geben wir eine Strategie an, die Anja anwenden kann, sodass sie das Spiel zwangsläufig gewinnt; diese Strategie gilt für **alle** Paare (a, b), wobei a und b gerade sind.

Dazu betrachten wir folgende Abbildung:



Hierbei sei das in der Abbildung gezeigte Rechteck $ABCD$, das Rechteck $R(a\times b) \overset{(1)}{=} R(a\times(m+a+m))$ (2), wobei $|AD| = |BC| = a$ und $|AB| = |CD| = b \overset{(1)}{=} a+2m$. Des Weiteren sei in der Abbildung $|DH| = |AE| = |CG| = |BF| = m$ und $|GH| = |HE| = |EF| = |FG| = a$.
Nun färbt Anja das Rechteck $R(a \times a)$, sodass links und rechts jeweils ein ungefärbtes respektive *gleiches* Rechteck $R(a \times m)$ entsteht, was nach (2) möglich ist (siehe Abbildung).
Es ist offensichtlich, dass bei **einem** *Zug* nicht beide Rechtecke $R(a\times m)$ gleichzeitig gefärbt werden könne, denn die beiden Rechtecke haben keine aneinandergrenzenden Seiten.
Ferner sind die beiden Rechtecke $R(a \times m)$ im jetzigen Zustand nach unserer Definition *gleich*.
Bernd ist nun dran und vollzieht einen *Zug* bei einem der beiden Rechtecke (die beiden Rechtecke sind also nicht mehr *gleich*). Anja wählt nur das andere Rechteck, welches von Bernd im letzten *Zug* nicht gefärbt wurde; sie färbt das Rechteck nun, sodass beide Rechtecke wieder *gleich* sind (sie muss also exakt die gleiche Färbung am anderen Rechteck vollziehen). Dies kann sie machen, da es unmittelbar aus der *Gleichheit* der Rechtecke im vorherigen *Zug* folgt. Dies wiederholt sich so oft, bis Anja den letzten *Zug* gemacht hat, denn wenn Bernd eine Färbung vollzogen hat, so kann Anja genau die selbe Färbung bei dem anderen Rechteck vollziehen, sodass Anja zwangsläufig die letzte Färbung vollzieht, da die Anzahl der Färbungen endlich ist, was aus der Anzahl der endlichen Einheitsquadraten folgt.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 2

Bemerkung: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{N}$. Es sei $a \equiv b \pmod{c}$ eine Kongruenz modulo c. Sie sagt aus, dass a in der gleichen Restklasse wie b modulo c liegt.

Wir drücken m durch $z \cdot n + r, 0 \leq r < n, z \in \mathbb{N}_0$ aus. Der Bruch $\frac{m}{n}$ wird nun zu $\frac{z \cdot n + r}{n} = z + \frac{r}{n}$. Nun können wir z frei wählen, da die Zahl hinter dem Komma unverändert bleibt, unabhängig davon wie wir z wählen. Also sei o.B.d.A. $z = 0$. Wir haben also $0 < m < n$ (da $m = 0$ offensichtlich nicht die Aufgabenstellung erfüllt), woraus folgt, dass der Bruch in der Dezimaldarstellung eine Null vor dem Komma hat.
Nun unterscheiden wir zwischen zwei Fällen:
<u>1. Fall:</u>
Die Ziffernfolge „7143" taucht zum ersten Mal unmittelbar hinter dem Komma auf, also gilt $\frac{m}{n} = 0,7143...$, wobei die Punkte symbolisieren, dass es sein kann, dass die Zahl noch mehr Stellen hinter dem Komma hat. Doch die Periode 9 ist nicht erlaubt, denn sonst wäre $\frac{m}{n} = 0,7143\overline{9} = 0,7144$, was nicht der Aufgabenstellung entspricht. Nun gelten die folgenden Ungleichungen:

$$0,7144 > \frac{m}{n} = 0,7143... \geq 0,7143$$

Oder die äquivalente Ungleichungskette:

$$7144 \cdot n > 10^4 \cdot m \geq 7143 \cdot n$$

Als erstes zeigen wir, dass das Gleichheitszeichen bei der zweiten Ungleichung nicht gelten kann, damit $n \leq 1250$ gilt. Wir haben also: $10^4 \cdot m = 7143 \cdot n$. Da die linke Seite durch 10^4 teilbar ist, muss auch die rechte Seite durch 10^4 teilbar sein, insbesondere n, da die Zahl 7143 und $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$ teilerfremd sind (da 7143 auf keine gerade Ziffer oder eine 5 endet).
Also gilt $10^4 \mid n$, dies impliziert $n \geq 10^4 > 1250$.
Wir erhalten also die neue Ungleichungskette:

$$7144 \cdot n > 10^4 \cdot m > 7143 \cdot n$$

Da $10^4 \cdot m$ zwischen diesen beiden ganzen Zahlen liegt, muss es ein k geben mit $10^4 \cdot m = 7144 \cdot n - k$, wobei $0 < k < n$.

Nun ist $7144 \cdot n - k = 10^4 \cdot m \equiv 0 \pmod{10^4}$. Folglich gilt:

$$7144 \cdot n \equiv k \ (mod\ 10^4),\ 0 < k < n$$

Wir unterscheiden nun zwischen sieben Fällen, wo n in allen Restklassen modulo 7 liegt. Also $n \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 \pmod 7$. Demzufolge ist $n = 7a+1$, $7a+2$, $7a+3$, $7a+4$, $7a+5$, $7a+6$, $7a+7$, für ein $a \in \mathbb{N}_0$. Wir erhalten also die Kongruenzen:

$7144 \cdot n \equiv 8a + 7144$, $8a + 4288$, $8a + 1432$, $8a + 8576$, $8a + 5720$, $8a + 2864$, $8a + 8$ (mod 10.000)

Wir nehmen an, dass in allen Fällen die Restklasse kleiner gleich 10.000 ist. Nach obiger Bedingung müssen sie außerdem echt größer Null und echt kleiner n sein. Beispielsweise muss im ersten Fall also $0 < 8a + 7144 < n = 7a + 1$ gelten (da wir angenommen haben, dass $8a + 7144 \leq 10^4$), was sicherlich nicht gilt, da $a \geq 0$. Man sieht leicht, dass es für die restlichen sechs Restklassen auch nicht gilt. Demzufolge müssen alle obigen Restklassen echt größer als 10.000 sein.

Im ersten Fall erhalten wir $8a + 7144 > 10^4$, was äquivalent ist zu $a > 357$, dies impliziert $n = 7a + 1 > 2500 > 1250$. Gehen wir nun alle anderen sechs Fälle der Reihe nach durch, erhalten wir:
$8a + 4288 > 10^4 \Leftrightarrow a > 714 \Rightarrow n = 7a + 2 > 5000 > 1250$;
$8a + 1432 > 10^4 \Leftrightarrow a > 1071 \Rightarrow n = 7a + 3 > 7500 > 1250$;
$8a + 8576 > 10^4 \Leftrightarrow a > 178 \Rightarrow n = 7a + 4 > 1250$;
$8a + 5720 > 10^4 \Leftrightarrow a > 535 \Rightarrow n = 7a + 5 > 3750 > 1250$;
$8a + 2864 > 10^4 \Leftrightarrow a > 892 \Rightarrow n = 7a + 6 > 6250 > 1250$;
$8a + 8 > 10^4 \Leftrightarrow a > 1249 \Rightarrow n = 7a + 7 > 8750 > 1250$;
In allen sieben Fällen gilt also stets $n > 1250$.

Kommen wir zum zweiten Fall:

2. Fall:
Nach dem Komma und vor der Ziffernfolge „7143", die zum ersten Mal auftaucht, ist eine nicht negative ganze Zahl x mit y Dezimalstellen, also gilt $\frac{m}{n} = 0, x7143...$, wobei die Punkte symbolisieren, dass es sein kann, dass die Zahl noch mehr Stellen hinter dem Komma hat. Doch die Periode 9 ist nicht erlaubt, denn sonst wäre $\frac{m}{n} = 0, x7143\overline{9} = 0, x7144$, was nicht der Aufgabenstellung entspricht. Ferner ist z.B. die Zahl $001 \neq 1$ nach dem Komma, doch vor dem Komma gilt üblicherweise $001 = 1$, das heißt x darf mit mindestens einer 0 anfangen; dies wird auch als Stelle gezählt.
Nun gelten die folgenden Ungleichungen:

$$0, x7144 > \frac{m}{n} = 0, x7143... \geq 0, x7143$$

Oder die äquivalente Ungleichungskette:

$$(10^4 \cdot x + 7144) \cdot n > 10^{y+4} \cdot m \geq (10^4 \cdot x + 7143) \cdot n$$

Als erstes zeigen wir, dass das Gleichheitszeichen bei der zweiten Ungleichung nicht gelten kann, damit $n \leq 1250$ gilt. Wir haben also: $10^{y+4} \cdot m = x7143 \cdot n$. Da die linke Seite durch 10^{y+4} teilbar ist, muss auch die rechte Seite durch 10^{y+4} teilbar sein, insbesondere n, da die Zahl $x7143$ und $10^{y+4} = 2^{y+4} \cdot 5^{y+4}$ teilerfremd sind (weil $x7143$ auf keine gerade Ziffer oder eine 5 endet). Also $10^{y+4} \mid n$, dies impliziert, dass $n \geq 10^{y+4} \geq 10^5 > 1250$.
Also erhalten wir die neue Ungleichungskette:

$$(10^4 \cdot x + 7144) \cdot n > 10^{y+4} \cdot m > (10^4 \cdot x + 7143) \cdot n$$

Demzufolge existiert für $10^{y+4} \cdot m$ eine ganze Zahl k mit $10^{y+4} \cdot m = (10^4 \cdot x + 7144) \cdot n - k$, $0 < k < n$. Des Weiteren gilt $7144 \cdot n - k \equiv (10^4 \cdot x + 7144) \cdot n - k = 10^{y+4} \cdot m \equiv 0 \pmod{10^4}$. Also folgt hieraus $7144 \cdot n \equiv k \pmod{10^4}$, $0 < k < n$, was genau der selbe Fall wie beim *1. Fall* war. Folglich gilt auch hier $n > 1250$.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 3

Bemerkung: Für eine reelle Zahl x ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist, also $\lceil x \rceil := min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\}$ (die obige Klammer wird auch Gaußklammer genannt).
Wir bezeichnen eine Färbung, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt als *legitime Möglichkeit.*
Mit einer *legitimen Zahl* meinen wir eine Zahl, bei der die nächst darauffolgende Zahl gleicher Farbe eine andere Parität hat oder wenn es keine darauffolgende Zahl gleicher Farbe gibt.

Vorerst werden einige Lemmata bewiesen:
Lemma (1): Es gilt für alle ganzen Zahlen n die Tatsache, dass $\lceil \frac{(n-2)}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{2} - 1 \rceil = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$.
Beweis:
Es genügt die letzte Gleichung zu beweisen, da bei der ersten Gleichung lediglich eine Umformung durchgeführt wurden.
Wir betrachten hierzu zwei Fälle:
1. Fall: Die ganze Zahl n ist gerade. Also existiert eine ganze Zahl m mit $n = 2m$ und wir erhalten dann die Gleichung $\lceil m-1 \rceil = \lceil m \rceil - 1$, was offensichtlich stimmt, denn wir können die Gaußklammern einfach weglassen, da m respektive $m-1$ schon eine ganze Zahl ist.
2. Fall: Die ganze Zahl n ist ungerade. Also existiert eine ganze Zahl m mit $n = 2m + 1$ und wir erhalten dann die zu beweisende Gleichung $\lceil m - \frac{1}{2} \rceil = \lceil m + \frac{1}{2} \rceil - 1$. Nun gilt $m > m - \frac{1}{2} > m - 1$, woraus $\lceil m - \frac{1}{2} \rceil = m$ folgt. Des Weiteren gilt $m + 1 > m + \frac{1}{2} > m$, folglich ist $\lceil m + \frac{1}{2} \rceil = m + 1$, dementsprechend ist die rechte Seite der Gleichung gleich m und die linke auch.

Lemma (2): Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ die folgende Gleichung: $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ (auch *geometrische Reihe* genannt).
Beweis:
Dies folgt unmittelbar, wenn wir die Gleichung mit dem Nenner der rechten Seiten multipliziert und die linke Seite dann ausmultipliziert (wir erhalten eine *Teleskopsumme*).

Lemma (3): Gegeben seien die positiven ganzen Zahlen $1, 2, ..., n$ in dieser Reihenfolge. Nun sind $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ dieser Zahlen gerade. Dies beweisen wir durch eine Fallunterscheidung:
<u>*Beweis:*</u>
<u>*1. Fall*</u>: Die positive ganze Zahl n ist gerade. Also existiert eine positive ganze Zahl m mit $n = 2m$ und wir erhalten $\lceil \frac{2m-1}{2} \rceil = \lceil m - \frac{1}{2} \rceil = m$, was offensichtlich stimmt.
<u>*2. Fall*</u>: Die positive ganze Zahl n ist ungerade. Also existiert eine positive ganze Zahl m mit $n = 2m - 1$ und wir erhalten dann $\lceil \frac{(2m-1)-1}{2} \rceil = m - 1$, was auch stimmt, da wir mit einer ungeraden Zahl anfangen und mit einer ungeraden Zahl enden, womit die Anzahl der ungeraden Zahl um eins höher als die Anzahl der geraden, sodass $m + (m - 1) = 2m - 1$ erfüllt ist.

Lemma (4): Gegeben seien die positiven ganzen Zahlen $1, 2, ..., n$ in dieser Reihenfolge. Nun ist die größte gerade Zahl unter diesen n Zahlen gleich $2 \cdot \lceil \frac{(n-1)}{2} \rceil$. Dies beweisen wir durch eine Fallunterscheidung:
<u>*Beweis:*</u>
<u>*1. Fall*</u>: Die positive ganze Zahl n ist ungerade. Also existiert eine positive ganze Zahl m mit $n = 2m - 1$ und wir erhalten $2m - 2$, was natürlich stimmt.
<u>*2. Fall*</u>: Die positive ganze Zahl n ist gerade. Also existiert eine positive ganze Zahl m mit $n = 2m$ und wir erhalten dann mit $m > \frac{2m-1}{2} > m - 1$ den Term $2m$.

Lemma (5): Wenn eine Zahl *legitim* ist, so muss zwischen dieser Zahl und der nächst darauffolgenden Zahl gleicher Farbe (sofern es eine gibt) eine gerade Anzahl an Zahlen sein.
Die Bedingung ist hinreichend, denn sei eine Zahl x mit $1 \leq x \leq n$ gefärbt, dann folgen bis zu nächstgrößeren Zahl gleicher Farbe $2k$ Zahlen mit $k \in \mathbb{N}_0$, folglich ist die nächstgrößeren Zahl gleicher Farbe gleich $x + 2k + 1 \equiv x + 1 \pmod 2$, womit die beiden Zahlen verschiedene Parität haben.
Die obige Aussage ist notwendig, denn wenn die Anzahl der Zahlen zwischen den beiden aufeinanderfolgenden Zahlen gleicher Farbe ungerade ist, dann ist die nächstgrößere Zahl gleicher Farbe gleich

$x + (2k + 1) + 1 \equiv x \pmod 2$, womit die beiden Zahlen gleiche Parität haben, Widerspruch.
Die Umkehrung gilt natürlich auch:
Wenn zwischen einer Zahl und der nächst darauffolgenden Zahl gleicher Farbe eine gerade Anzahl an Zahlen ist, so ist die Zahl *legitim*. Sei x diese Zahl, dann folgt, dass die nächst größere Zahl gleicher Farbe gleich $x + 2k + 1$ ist, wobei $x + 2k + 1 \equiv x + 1 \pmod 2$ ist, womit die beiden Zahlen verschiedene Parität haben.

Lemma (6): Für eine *legitime Möglichkeit* von „$1, ..., n$" müssen alle Zahlen *legitim* sein, denn wenn es nicht so wäre, gäbe es ein k mit $1 \leq k < n$, sodass die nächst darauffolgende Zahl gleicher Farbe die selbe Parität hat, was der Annahme widersprechen würde, dass „$1, ..., n$" eine *legitime Möglichkeit* ist, denn die Bedingung (1) wäre nicht erfüllt.

Lemma (7): Wir benutzen genau zwei Farben zum färben (d.h. die Bedingung (2) fällt weg). Wenn nun alle Zahlen von „$1, ..., n$" *legitim* sind, so liegt eine *legitime Möglichkeit* vor, denn wenn keine *legitime Möglichkeit* vorhanden ist, so muss es mindestens eine Zahl geben, wo die nächst darauffolgende Zahl gleicher Farbe die selbe Parität hat, also ist die Zahl nicht *legitim*, was aber der Annahme widerspricht.

Lemma (8): Wir benutzen genau zwei Farben zum färben (d.h. die Bedingung (2) fällt weg). Wir betrachten die *legitime Möglichkeit* „$1, 2, ..., n$". Nach *Lemma (8)* ist jede Zahl *legitim*. Nach *Lemma (7)* ist nun zwischen jeder Zahl und der darauffolgenden Zahl gleicher Farbe (sofern es eine gibt) eine gerade Anzahl an Zahlen.
Wenn wir nun die 1 weglassen, verringert sich jede Zahl x mit $2 \leq x \leq n$ um 1, aber die Farbe bleibt gleich. Nun ist nach der Umkehrung von *Lemma (7)* jedes x natürlich noch immer *legitim*, da die Anzahl der Zahlen zwischen x und der nächst größeren Zahl gleicher Farbe (sofern es eine gibt) noch immer gerade ist. Nach *Lemma (9)* sind also die restlichen $n - 1$ Zahlen eine *legitime Möglichkeit.*

Lemma (9): Wir benutzen genau zwei Farben zum färben (d.h. die Bedingung (2) fällt weg). Wir betrachten die *legitime Möglichkeit* „$1, 2, ..., n$". Nach *Lemma (8)* ist jede Zahl *legitim*. Nach *Lemma (7)* ist nun zwischen jeder Zahl und der darauffolgenden Zahl gleicher

Farbe (sofern es eine gibt) eine gerade Anzahl an Zahlen.
Wenn wir vorne nun eine 1 dranhängen, wobei die neue 1 die selbe Farbe hat,w ie die alte 1 bei „$1, 2, ..., n$", so erhöht sich jede Zahl x mit $1 \leq x \leq n$ um 1, aber die Farbe bleibt gleich. Die erste Zahl ist nun natürlich *legitim*, da wir sie genau so gefärbt haben, wie die zweite Zahl. Nun ist nach der Umkehrung von *Lemma (7)* jedes x natürlich noch immer *legitim*, da die Anzahl der Zahlen zwischen x und der nächst größeren Zahl gleicher Farbe (sofern es eine gibt) noch immer gerade ist. Nach *Lemma (9)* sind also alle $n+1$ Zahlen eine *legitime Möglichkeit*.

Lemma (10): Wir benutzen genau drei Farben. Wenn nun alle Zahlen von „$1, ..., n$" *legitim* sind und Bedingung (2) erfüllt ist, so folgt mit *Lemma (9)*, dass eine *legitime Möglichkeit* vorliegt.

Lemma (11): Wir benutzen genau drei Farben zum färben. Wir betrachten die *legitime Möglichkeit* „$1, 2, ..., n$", wobei 1 und 2 die selbe Farbe haben.
Wenn wir nun die 1 gelassen, folgt mit *Lemma (10)*, dass die restlichen $n - 1$ Zahlen die Bedingung (1) erfüllen.
Um zu zeigen, dass diese $n-1$ Zahlen eine *legitime Möglichkeit* bilden, müssen wir zeigen, dass die Bedingung (2) an den $n-1$ Zahlen auch erfüllt ist:
Da „$1, 2, ..., n$" eine *legitime Möglichkeit* ist, wobei 1 und 2 die selbe Farbe haben, muss es genau eine der beiden anderen Farben geben, sodass die kleinste Zahl, nennen wir sie a, in dieser Farbe gerade ist, womit folgt, dass die kleinste Zahl in der anderen Farbe, nennen wir sie b, ungerade sein muss.
Durch das Weglassen der 1 von „$1, 2, ..., n$", ist die neue 1 (= alte 2) in genau der selben Farbe. Ferner werden alle Stellen x mit $2 \leq x \leq n$ um 1 kleiner, sodass sich die Parität jeder Zahl ändert und a ungerade bzw. b gerade wird. Womit Bedingung (2) erfüllt ist.

Lemma (12): Wir benutzen genau drei Farben zum färben. Wir betrachten die *legitime Möglichkeit* „$1, 2, ..., n$". Wenn wir nun eine neue 1 vorne dranhängen mit der selben Farbe, wie die alte 1 bei „$1, 2, ..., n$", folgt mit *Lemma (11)*, dass die $n+1$ Zahlen die Bedingung (1) erfüllen.
Um zu zeigen, dass diese $n+1$ Zahlen eine *legitime Möglichkeit* bilden, müssen wir zeigen, dass die Bedingung (2) an den $n+1$ Zahlen

auch erfüllt ist:
Da „$1, 2, ..., n$" eine *legitime Möglichkeit* ist, muss es genau eine der beiden anderen Farben geben, sodass die kleinste Zahl, nennen wir sie a, in dieser Farbe gerade ist, womit folgt, dass die kleinste Zahl in der anderen Farbe, nennen wir sie b, ungerade sein muss.
Durch das Dranhängen der 1 bei „$1, 2, ..., n$", bleibt die Farbe an der ersten Stelle gleich. Ferner werden alle Stellen x mit $1 \leq x \leq n$ um 1 größer, sodass sich die Parität jeder Zahl ändert und a ungerade bzw. b gerade wird. Womit Bedingung (2) erfüllt ist.

Kommen wir nun zur ursprünglichen Aufgabe:
Wir haben die positiven ganzen Zahlen „$1, 2, ..., n$" in dieser Reihenfolge gegeben.
Eine Zahl, die gefärbt wurde, ersetzen wir durch den Anfangsbuchstaben der Farbe. Dementsprechend ist $r := rot$, $g := gelb$ und $b := blau$. Wir betrachten als Beispiel die Zahl 1, die rot gefärbt wurde und die Zahl 2, die blau gefärbt wurde, dann erhalten wir das Bild „r, b" anstellen von „$1, 2$" mit der jeweiligen Farbe. Ferner betrachten wir die Stelle des Buchstaben, dieser steht für die Zahl, die gefärbt wurde. In unserem Beispiel steht das r an erster Stelle, was für die Zahl 1 steht und das b steht an zweiter Stelle, was für die Zahl 2 steht. Im Folgenden meinen wir mit der k-ten Stelle die Zahl k.
Für eine positive ganze Zahl n sei $M(n)$ die Anzahl aller möglichen Färbungen der Zahlen „$1, 2, ..., n$", die den Bedingungen (1) und (2) in der Aufgabenstellung genügen.
Nun teilen wir $M(n)$ in drei disjunkte Teilmengen (d.h. Teilmengen, die keine gemeinsamen Elemente besitzen). Es sei a_n die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten*, bei der genau eine Farbe benutzt wird, b_n bei der genau zwei Farben benutzt werden und c_n bei der genau drei Farben benutzt werden. Dann gilt folgende Gleichung:

$$M(n) = \binom{3}{1} \cdot a_n + \binom{3}{2} \cdot b_n + \binom{3}{3} \cdot c_n = 3 \cdot a_n + 3 \cdot b_n + 1 \cdot c_n$$

Da wir bei genau einer Farbe genau drei Möglichkeiten haben die Farbe zu wählen, bei genau zwei Farben haben wir genau drei Möglichkeiten die Farben zu wählen und wenn alle drei Farben benutzt werden, haben wir genau eine Möglichkeit die Farben auszuwählen. Bei a_n gibt es offensichtlich nur eine Möglichkeit alle Zahlen zu färben (da wir genau eine Farbe benutzen müssen). Also ist $a_n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* bei b_n drücken wir nun durch eine rekursiv definierten Rekursionsgleichung aus, wobei $b_1 = 0$, da wir hier zwei Farben benutzen müssen und dementsprechend keine *legitime Möglichkeit* existiert eine Zahl mit zwei Farben zu färben:

$$b_{n+1} = 2 \cdot (\frac{b_n}{2} + 2^{\lceil (n-2)/2 \rceil})$$

Diese Rekursionsgleichung werden wir nun beweisen:
O.B.d.A. wählen wir die beiden Farben *blau* $=: b$ und *rot* $=: r$.
Da wir nur zwei Farben für die Färbung benutzen, müssen wir **nur** die Bedingung (1) in der Aufgabenstellung beachten.
Gegeben seien die Zahlen „$1, 2, ..., n+1$" in dieser Reihenfolge.
Es gibt genau so viele *legitime Möglichkeiten* mit b anzufangen (die 1 wird also *blau* gefärbt) wie mit r anzufangen, dies folgt aus einfachen Symmetriegründen zwischen b und r (die b werden zu r und die r werden zu b).
Dementsprechend dürfen wir o.B.d.A. mit b anfangen und müssen die Anzahl der *legitime Möglichkeiten* mit b am Anfang mit zwei multiplizieren (siehe Rekursionsgleichung).
Nun führen wir zwei Fallunterscheidungen durch.
1. Fall:
In diesem Fall sei die Anzahl der Stellen von „$b, b, ...$" immer gleich $n+1$ und die von „$b, ...$" respektive „$r, ...$" immer gleich n.

Nach dem ersten b folgt wieder ein b, also erhalten wir das Bild „$b, b, ...$", wobei die Punkte symbolisieren, dass noch mehrere Stellen existieren können, in unserem Fall bis zur Stelle $n+1$.
Die Anzahl aller *legitimen Möglichkeiten* von „$b, ...$" beträgt $\frac{b_n}{2}$, da „$b, ...$" genau so viele *legitimen Möglichkeiten* wie „$r, ...$" besitzt (siehe Argumentation oben) und die Summe natürlich gleich b_n sein muss, da b_n gerade die Anzahl aller *legitimen Möglichkeiten* bei Benutzung von zwei Farben für n Zahlen ist.
Wir zeigen nun, dass „$b, b, ...$" genau so viele *legitimen Möglichkeiten* wie „$b, ...$" besitzt:
Beweis:
Wir bezeichnen die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, b, ...$" mit X und wie oben schon gezeigt wurde, ist die Anzahl von „$b, ...$" gleich $\frac{b_n}{2}$.

Wir betrachten eine beliebige *legitime Möglichkeit* von „$b, b, ...$”.
Durch das Weglassen des ersten b folgt mit *Lemma (8)*, dass „$b, ...$” eine *legitime Möglichkeit ist.*
Folglich ist die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, b, ...$” kleiner gleich die von „$b, ...$”, da wir für jede *legitime Möglichkeit* von „$b, b, ...$” genau eine *legitime Möglichkeit* von „$b, ...$” erhalten, wobei wir aus zwei verschiedene *legitime Möglichkeit* von „$b, b, ...$” nie genau eine *legitime Möglichkeit* von „$b, ...$” erhalten, denn sonst würden die beiden „$b, b, ...$” gleich sein. Also ist $X \leq \frac{b_n}{2}$.
Wir betrachten nun eine beliebige *legitime Möglichkeit* von „$b, ...$”.
Durch das Dranhängen eines b vorne, folgt mit *Lemma (9)*, dass „$b, b, ...$” eine *legitime Möglichkeit ist.*
Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt $\frac{b_n}{2} \leq X$. Insgesamt erhalten wir $X \leq \frac{b_n}{2} \leq X$, woraus folgt $X = \frac{b_n}{2}$, was also der erste Summand in der Rekursionsgleichung ist.
2. Fall:
Nach dem ersten b folgt ein r, also erhalten wir das Bild „$b, r, ...$” mit $n+1$ Stellen. Mit *Lemma (5)* erhalten wir folgendes Bild:
„$b, r, r, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, ...$” mit $x_i \in \{r, b\}$ für $i = 1, 2, 3, ...$
Dies heißt nichts anderes als: Wenn eine Farbe an einer geraden Stelle ist, so muss sie auch an der nächst darauffolgenden Stelle, welche ungerade ist, sein.
Also ist die Anzahl nur von den x_i an den geraden Stellen abhängig. Diese x_i an den geraden Stellen dürfen wir frei wählen (sie dürfen bzw. können also beide Farben annehmen). Die Bedingung (1) wird offensichtlich immer eingehalten nach unserer Argumentation oben.
Kommen wir zur Ausgangs-Reihenfolge „$b, r, ...$” mit $n+1$ Stellen. Da die ersten beiden stellen schon gefärbt wurden bleiben $n-1$ Stellen übrig. Nach *Lemma (3)* sind dann $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ dieser Stellen gerade. Und da wir zwei Möglichkeiten pro gerade Stelle haben, erhalten wir $2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{\lceil (n-2)/2 \rceil}$ (siehe Rekursionsgleichung).
Somit haben wir die Richtigkeit der Rekursionsgleichung bewiesen.
Nun erhalten wir rekursiv:
$b_{n+1} = 2 \cdot (\frac{b_n}{2} + 2^{\lceil (n-2)/2 \rceil}) = b_n + 2^{\lceil (n-2)/2 \rceil + 1}$
$\overset{(1)}{=} b_n + 2^{\lceil n/2 \rceil} = b_{n-1} + 2^{\lceil (n-1)/2 \rceil} + 2^{\lceil n/2 \rceil}$
$= ... = b_1 + 2^{\lceil 1/2 \rceil} + 2^{\lceil 2/2 \rceil} + ... + 2^{\lceil (n-1)/2 \rceil} + 2^{\lceil n/2 \rceil}$
$= 2^{\lceil 1/2 \rceil} + 2^{\lceil 2/2 \rceil} + ... + 2^{\lceil (n-1)/2 \rceil} + 2^{\lceil n/2 \rceil}$

Um den Summenwert zu vereinfachen, führen wir nun eine Fallunterscheidung durch.
1. Fall: $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$.
Wir erhalten $b_{2m+1} = 2^{m+2} - 4$. Dies zeigen wir mittels vollständiger Induktion über m:
Induktionsanfang: Für $m = 0$ erhalten wir $b_1 = 0$, was stimmt.
Induktionsannahme: Es sei die Behauptung für m bereits bewiesen, es gelte also $b_{2m+1} = 2^{m+2} - 4$.
Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsannahme und der Rekursionsvorschrift zeigen wir nun die Behauptung für $m+1$.
Zu zeigen ist also, dass $b_{2m+3} = 2^{m+3} - 4$.
$b_{2m+3} = b_{2m+1} + 2^{\lceil (2m+1)/2 \rceil} + 2^{\lceil (2m+2)/2 \rceil}$
$= 2^{m+2} - 4 + 2^{m+1} + 2^{m+1} = 2^{m+3} - 4$

$\square$

2. Fall: $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$.
Wir erhalten $b_{2m} = 3 \cdot 2^m - 4$. Dies zeigen wir auch mit der vollständigen Induktion über m:
Induktionsanfang: Für $m = 1$ erhalten wir $b_2 = 2$, was man sich leicht überlegen kann.
Induktionsannahme: Es sei die Behauptung für m bereits bewiesen, es gelte also $b_{2m} = 3 \cdot 2^m - 4$.
Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsannahme und der Rekursionsvorschrift zeigen wir nun die Behauptung für $m+1$.
Zu zeigen ist also, dass $b_{2m+2} = 3 \cdot 2^{m+1} - 4$.
$b_{2m+2} = b_{2m} + 2^{\lceil (2m+1)/2 \rceil} + 2^{\lceil 2m/2 \rceil}$
$= 3 \cdot 2^m - 4 + 2^{m+1} + 2^m = 3 \cdot 2^m - 4 + 3 \cdot 2^m = 3 \cdot 2^{m+1} - 4$

$\square$

Wir erhalten also insgesamt:

$$b_n = \begin{cases} 3 \cdot 2^{(n/2)} - 4 & \text{, für } 2 \mid n \\ 2^{(n+3)/2} - 4 & \text{, für } 2 \nmid n \end{cases} (*)$$

Kommen wir zur dritten Teilmenge c_n. Die Anzahl der Möglichkeiten bei c_n drücken wir auch durch eine rekursiv definierten Rekursionsgleichung aus, wobei $c_1 = c_2 = 0$, da wir hier drei Farben benutzen müssen und dementsprechend keine *legitime Möglichkeit* existiert eine bzw. zwei Zahlen mit drei Farben zu färben:

$$c_{n+1} = 3 \cdot (\frac{c_{n-1}}{3} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} 2^{n-k-2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lceil (n+1)/2 \rceil - 1} 2^{n-k-1})$$

Gegeben seien die Zahlen „$1, 2, ..., n + 1$" in dieser Reihenfolge.
Da wir hier die drei Farben r, b und g benutzen, müssen wir beide Bedingung in der Aufgabenstellung beachten.
Mit dem gleichen Argument wie oben (aus Symmetriegründe), fangen wir o.B.d.A. mit b an und müssen die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, ...$" mit drei multiplizieren (siehe Rekursionsgleichung). Nun unterscheiden wir zwischen drei Fällen:
1. Fall:
In diesem Fall sei die Anzahl der Stellen von „$b, b, b, ...$" immer gleich $n + 1$ und die von „$b, ...$", „$r, ...$" und „$g, ...$" immer gleich $n - 1$.

Nach dem ersten b folgen zwei weitere b, wir erhalten also das Bild „$b, b, b, ...$".
Betrachten wir nun „$b, ...$" , dann folgt, dass die Anzahl gleich die von „$r, ...$" und gleich die von „$g, ...$" ist, was aus Symmetriegründen folgt. Ferner ist die Summe gleich c_{n-1}, da diese gerade die Anzahl aller *legitimen Möglichkeiten* von $n - 1$ Zahlen bei Benutzung von drei Farben ist. Folglich ist die Anzahl von „$b, ...$" gleich $\frac{c_{n-1}}{3}$.
Wir zeigen nun, dass „$b, b, b, ...$" genau so viele *legitimen Möglichkeiten* wie „$b, ...$" besitzt:
<u>*Beweis:*</u>
Wir bezeichnen die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, b, b, ...$" mit Y und wie oben schon gezeigt wurde, ist die Anzahl von „$b, ...$" gleich $\frac{c_{n-1}}{3}$. Wir betrachten nun eine beliebige *legitime Möglichkeit* von „$b, b, b, ...$". Durch zweimaliges Weglassen von b an der Stelle 1 und mit wiederholtem anwenden von *Lemma (11)* folgt, dass „$b, ...$" eine *legitime Möglichkeit* ist. Wir erhalten also mit der gleichen Argumentation wie bei „*Seite 8*" die Ungleichung $Y \leq \frac{c_{n-1}}{3}$.
Wir betrachten eine beliebige *legitime Möglichkeit* von „$b, ...$". Durch zweimaliges Anhängen eines b am Anfang und mit wiederholtem anwenden von *Lemma (12)* folgt, dass „$b, b, b, ...$" eine

legitime Möglichkeit ist. Wir erhalten auch hier mit dem gleichen Argument wie bei „*Seite 12*" die Ungleichung $\frac{c_{n-1}}{3} \leq Y$.
Insgesamt folgt $Y \leq \frac{c_{n-1}}{3} \leq Y$, also $Y = \frac{c_{n-1}}{3}$ (siehe Rekursionsgleichung).
2. Fall:
Nach dem ersten b folgt noch ein b und dann entweder ein g oder r. Die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, b, r, ...$" mit $n+1$ Stellen ist gleich die der von „$b, b, g, ...$" mit $n+1$ Stellen, was aus Symmetriegründen folgt (die r werden zu g und die g zu r). Also dürfen wir o.B.d.A. mit r an dritter Stelle anfangen und müssen die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, b, r, ...$" mit $n+1$ Zahlen mit 2 multiplizieren.
Damit die Bedingung (2) erfüllt sein muss, muss das erste g an einer geraden Stelle sein, also „$b, b, r, ..., g, ...$" mit $n+1$ Zahlen, wobei g an der Stelle $2k+2$ ist mit $1 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$, da nach *Lemma (4)* $2k+2 = 2 \cdot (\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1) + 2 = 2 \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$ die größte gerade Zahl unter $n+1$ Zahlen ist und $2k+2$ alle geraden Zahlen zwischen 4 und $n+1$ annehmen muss.
Wir zeigen nun, dass an jeder Stelle, wo schon alle drei Farben vor der Stelle benutzt wurden, genau 2 Möglichkeiten existieren:
Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., x, ?$". Wir unter scheiden nun zwei Fälle:
***1. Fall*:** Das x ist an einer geraden Stelle.
Hierbei unterscheiden wir nun wieder zwischen drei Fällen, wo das x alle drei Farben annimmt.
***1.1. Fall*:** Sei in diesem Fall $x = r$. Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., r, ?$", wobei das r vor dem Fragezeichen an einer geraden Stelle ist. Nun ist $? = r$ offensichtlich eine *legitime Möglichkeit*. Nun sei $? \neq r$. Da das erste r an einer ungeraden Stelle ist, muss das zweite r an einer geraden Stelle sein, das dritte an einer ungeraden usw. Nun ist das letzte r an einer geraden Stelle, woraus folgt, dass wir unter diesen ganzen Stellen (ohne das Fragezeichen), welche gerade sind, eine gerade Anzahl an r haben. Da die gesamt Anzahl gerade ist und die Anzahl der r gerade ist, muss die Anzahl der b und g zusammen gerade sein. Demnach ist entweder die Anzahl der b und g gerade oder der b und g ungerade. Im ersten Fall ist das letzte b an einer geraden Stelle und das letzte g an einer ungeraden Stelle, weswegen nur $? = b$ eine *legitime Möglichkeit* ist. Im anderen Fall ist das letzte b an einer ungeraden Stelle und das letzte g an ei-

ner geraden Stelle, weswegen nur $? = g$ eine *legitime Möglichkeit* ist.

***1.2. Fall*:** Sei in diesem Fall $x = g$. Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., g, ?$”, wobei das g vor dem Fragezeichen an einer geraden Stelle ist und das erste g an einer geraden Stelle ist.
Nun ist $? = g$ offensichtlich eine *legitime Möglichkeit*. Nun sei $? \neq g$. Da das erste g an einer geraden Stelle ist, muss das zweite g an einer ungeraden Stelle sein, das dritte an einer geraden usw. Nun ist das letzte g an einer geraden Stelle, woraus folgt, dass wir unter diesen ganzen Stellen (ohne das Fragezeichen), welche gerade ist, eine ungerade Anzahl an g haben. Da die gesamt Anzahl gerade ist und die Anzahl der g ungerade ist, muss die Anzahl der b und r zusammen ungerade sein. Demnach ist entweder die Anzahl der b gerade und der r ungerade oder der b ungerade und der r gerade. Im ersten Fall ist das letzte b an einer geraden Stelle und das letzte r an einer ungeraden Stelle, weswegen nur $? = b$ eine *legitime Möglichkeit* ist. Im anderen Fall ist das letzte b an einer ungeraden Stelle und das letzte r an einer geraden Stelle, weswegen nur $? = r$ eine *legitime Möglichkeit* ist.

***1.3. Fall*:** Sei in diesem Fall $x = b$. Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., b, ?$”, wobei das b vor dem Fragezeichen an einer geraden Stelle ist und das erste b an einer ungeraden Stelle ist.
Nun ist $? = b$ offensichtlich eine *legitime Möglichkeit*. Nun sei $? \neq b$. Da das erste b an einer ungeraden Stelle ist, muss das zweite b an einer geraden Stelle sein, das dritte an einer ungeraden usw. Nun ist das letzte b an einer geraden Stelle, woraus folgt, dass wir unter diesen ganzen Stellen (ohne das Fragezeichen), welche gerade ist, eine gerade Anzahl an b haben. Da die gesamt Anzahl gerade ist und die Anzahl der b gerade ist, muss die Anzahl der g und r zusammen gerade sein. Demnach ist entweder die Anzahl der g und r gerade oder der g und r ungerade. Im ersten Fall ist das letzte g an einer ungeraden Stelle und das letzte r an einer geraden Stelle, weswegen nur $? = r$ eine *legitime Möglichkeit* ist. Im anderen Fall ist das letzte g an einer geraden Stelle und das letzte r an einer ungeraden Stelle, weswegen nur $? = g$ eine *legitime Möglichkeit* ist.

Womit wir gezeigt haben, dass bei allen ungeraden Stellen, wo schon alle drei Farben vor der Stelle benutzt wurden, genau 2 Möglichkeiten existieren.
Kommen wir zum zweiten Fall:
2. Fall: Das x ist an einer ungeraden Stelle.
Hierbei unterscheiden wir nun wieder zwischen drei Fällen, wo das x alle drei Farben annimmt.
2.1. Fall: Sei in diesem Fall $x = r$. Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., r, ?$", wobei das r vor dem Fragezeichen an einer ungeraden Stelle ist. Nun ist $? = r$ offensichtlich eine *legitime Möglichkeit*. Nun sei $? \neq r$. Da das erste r an einer ungeraden Stelle ist, muss das zweite r an einer geraden Stelle sein, das dritte an einer ungeraden usw. Nun ist das letzte r an einer ungeraden Stelle, woraus folgt, dass wir unter diesen ganzen Stellen (ohne das Fragezeichen), welche ungerade sind, eine ungerade Anzahl an r haben. Da die gesamt Anzahl ungerade ist und die Anzahl der r ungerade ist, muss die Anzahl der b und g zusammen gerade sein. Demnach ist entweder die Anzahl der b und g gerade oder der b und g ungerade. Im ersten Fall ist das letzte b an einer geraden Stelle und das letzte g an einer ungeraden Stelle, weswegen nur $? = g$ eine *legitime Möglichkeit* ist. Im anderen Fall ist das letzte b an einer ungeraden Stelle und das letzte g an einer geraden Stelle, weswegen nur $? = b$ eine *legitime Möglichkeit* ist.
2.2. Fall: Sei in diesem Fall $x = g$. Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., g, ?$", wobei das g vor dem Fragezeichen an einer ungeraden Stelle ist und das erste g an einer geraden Stelle ist.
Nun ist $? = g$ offensichtlich eine *legitime Möglichkeit*. Nun sei $? \neq g$. Da das erste g an einer geraden Stelle ist, muss das zweite g an einer ungeraden Stelle sein, das dritte an einer geraden usw. Nun ist das letzte g an einer ungeraden Stelle, woraus folgt, dass wir unter diesen ganzen Stellen (ohne das Fragezeichen), welche ungerade ist, eine gerade Anzahl an g haben. Da die gesamt Anzahl ungerade ist und die Anzahl der g gerade ist, muss die Anzahl der b und r zusammen ungerade sein. Demnach ist entweder die Anzahl der b gerade und der r ungerade oder der b ungerade und der r gerade. Im ersten Fall ist das letzte b an einer geraden Stelle und das letzte r an einer ungeraden Stelle, weswegen nur $? = r$ eine *legitime Möglichkeit* ist. Im anderen Fall ist das letzte b an einer ungeraden Stelle und das letzte r an einer geraden Stelle, weswegen nur $? = b$ eine *legitime Möglichkeit* ist.

<u>2.3. Fall:</u> Sei in diesem Fall $x = b$. Wir haben also das Bild „$b, b, r, ..., g, ..., b, ?$”, wobei das b vor dem Fragezeichen an einer ungeraden Stelle ist und das erste b an einer ungeraden Stelle ist.
Nun ist $? = b$ offensichtlich eine *legitime Möglichkeit*. Nun sei $? \neq b$. Da das erste b an einer ungeraden Stelle ist, muss das zweite b an einer geraden Stelle sein, das dritte an einer ungeraden usw. Nun ist das letzte b an einer ungeraden Stelle, woraus folgt, dass wir unter diesen ganzen Stellen (ohne das Fragezeichen), welche ungerade ist, eine ungerade Anzahl an b haben. Da die gesamt Anzahl ungerade ist und die Anzahl der b ungerade ist, muss die Anzahl der g und r zusammen gerade sein. Demnach ist entweder die Anzahl der g und r gerade oder der g und r ungerade. Im ersten Fall ist das letzte g an einer ungeraden Stelle und das letzte r an einer geraden Stelle, weswegen nur $? = g$ eine *legitime Möglichkeit* ist. Im anderen Fall ist das letzte g an einer geraden Stelle und das letzte r an einer ungeraden Stelle, weswegen nur $? = r$ eine *legitime Möglichkeit* ist.

Womit wir gezeigt haben, dass bei allen geraden Stellen, wo schon alle drei Farben vor der Stelle benutzt wurden, genau 2 Möglichkeiten existieren.
Insgesamt folgt also, dass bei jeder Stelle, wo schon alle drei Farben vor der Stelle benutzt wurden, genau 2 Möglichkeiten existieren.
Kommen wir zur Folge $b, b, r, ..., g, ...$ zurück, wobei das erste g an der Stelle $2k + 2$ ist mit $1 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ (siehe „*Seite 15*”).
Vor dem ersten g an der Stelle $2k + 2$ haben wir nur zwei Farben zur Verfügung, weswegen wir mit der gleichen Argumentation vorgehen können, wie beim Fall b_n, als wir sagten, dass die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* nur von der Anzahl der geraden Stellen abhängig ist und man diese frei wählen darf. Wir haben also bis zur Stelle $2k + 1$ die ersten drei Stellen schon gefärbt. Folglich bleiben die $2k - 2$ Stellen übrig. Davon sind $\lceil \frac{2k-2}{2} \rceil = k - 1$ gerade. Da wir für jede gerade Stelle zwei Möglichkeiten haben, erhalten wir $2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{k-1}$ Möglichkeiten.
Wie wir gezeigt haben gibt es an jeder Stelle, welche nach $2k + 2$ folgt zwei Möglichkeiten eine Farbe zu wählen. Also $2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{(n+1)-(2k+2)} = 2^{n-2k-1}$.
Zu jeder Möglichkeit vor $2k + 2$ gibt es also 2^{n-2k-1} Möglichkeiten. Demnach gibt es insgesamt $2^{k-1} \cdot 2^{n-2k-1} = 2^{n-k-2}$ Möglichkeiten

für festes k. Doch da k alle Werte von 1 bis $\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1$ annimmt, erhalten wir die Summe $\sum\limits_{k=1}^{\lceil n/2\rceil-1} 2^{n-k-2}$. Diese Anzahl müssen wir noch mit 2 multiplizieren (siehe „*Seite 15*"). Nun haben wir den zweiten Summanden in der Rekursionsgleichung gegeben.
Kommen wir zum dritten Fall:

***3. Fall*:**

In diesem Fall sei die Anzahl der Stellen von „$b, b, r, ...$" immer gleich $n + 1$ und die von „$b, r, ...$" respektive „$b, g, ...$" immer gleich n, nur dann nicht, wenn wir es explizit hinschreiben.

Nach dem ersten b folgt entweder ein g oder r. Die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, r, ...$" ist gleich die der von $b, g, ...$, was aus Symmetriegründen folgt (die r werden zu g und die g werden zu r). Also dürfen wir o.B.d.A. mit r an zweiter Stelle anfangen und müssen die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, r, ...$" mit 2 multiplizieren.
Wir zeigen nun, dass „$b, b, r, ...$" genau so viele *legitime Möglichkeiten* wie „$b, r, ...$" besitzt:
Beweis:
Wir bezeichnen die Anzahl der *legitimen Möglichkeiten* von „$b, b, r, ...$" mit X_{n+1} und die Anzahl von „$b, r, ...$" mit Y_n. Wir betrachten eine beliebige *legitime Möglichkeit* von „$b, b, r, ...$". Durch Weglassen von b an der Stelle 1 und mit *Lemma (11)* folgt, dass „$b, r, ...$" eine *legitime Möglichkeit* ist. Wir haben also $X_{n+1} \leq Y_n$.
Wir betrachten eine beliebige *legitime Möglichkeit* von „$b, r, ...$". Durch Anhängen eines b am Anfang und mit *Lemma (12)* folgt, dass „$b, b, r, ...$" eine *legitime Möglichkeit* ist. Wir haben also $Y_n \leq X_{n+1}$.
Insgesamt folgt $Y_n \leq X_{n+1} \leq Y_n$, also $X_{n+1} = Y_n$. Hieraus erhalten wir also „$b, r, ...$" **mit n+1 Stellen** hat genau so viele *legitime Möglichkeiten* wie „$b, b, r, ...$" **mit n+2 Stellen**, also $X_{n+2} = Y_{n+1}$. Und da wir X_{n+1} schon ausgerechnet haben, folgt $Y_{n+1} = X_{n+2} = \sum\limits_{k=1}^{\lceil (n+1)/2\rceil-1} 2^{n-k-1}$. Dies müssen wir noch mit 2 multiplizieren (siehe oben), womit wir die Rekursionsgleichung bewiesen haben.

Wir formen nun die Rekursionsgleichung um:

$c_{n+1} = 3 \cdot (\frac{c_{n-1}}{3} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil -1} 2^{n-k-2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lceil (n+1)/2 \rceil -1} 2^{n-k-1})$

$= c_{n-1} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil -1} 2^{n-k-1} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{\lceil (n+1)/2 \rceil -1} 2^{n-k};$

Auch hier führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wir erhalten:

$c_{2m+1} = c_{2m-1} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} 2^{2m-k-1} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{m} 2^{2m-k}$

$= c_{2m-1} + 3 \cdot 2^m \cdot (2^{m-2} + 2^{m-3} + ... + 2^1 + 2^0)$

$+3 \cdot 2^m \cdot (2^{m-1} + 2^{m-2} + ... + 2^1 + 2^0)$

$= c_{2m-1} + 3 \cdot 2^m \cdot (2^{m-1} - 1) + 3 \cdot 2^m \cdot (2^m - 1)$

$= c_{2m-1} + 3 \cdot 2^{2m-1} - 3 \cdot 2^m + 3 \cdot 2^{2m} - 3 \cdot 2^m$

$= c_{2m-1} + 9 \cdot 2^{2m-1} - 3 \cdot 2^{m+1}$

$= (c_{2m-3} + 9 \cdot 2^{2m-3} - 3 \cdot 2^m) + 9 \cdot 2^{2m-1} - 3 \cdot 2^{m+1}$

$= ... = c_1 + 9 \cdot (2^{2m-1} + 2^{2m-3} + ... + 2^1) - 3 \cdot (2^{m+1} + 2^m + ... + 2^2)$

$= 18 \cdot (2^{2m-2} + 2^{2m-4} + ... + 2^2 + 2^0) - 12 \cdot (2^{m-1} + 2^{m-2} + ... + 2^0)$

$\stackrel{(2)}{=} 18 \cdot (4^{m-1} + 4^{m-2} + ... + 4^1 + 4^0) - 12 \cdot (\frac{2^m - 1}{2 - 1})$

$\stackrel{(2)}{=} 18 \cdot (\frac{4^m - 1}{4 - 1}) - 12 \cdot (2^m - 1)$

$= 3 \cdot 2^{2m+1} - 6 - 3 \cdot 2^{m+2} + 12$

Also erhalten wir $c_n = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{(n+3)/2} + 6$ für ungerade n.

1. Fall: $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wir erhalten:

$c_{2m} = c_{2m-2} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} 2^{2m-k-2} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} 2^{2m-1-k}$

$= c_{2m-2} + 3 \cdot 2^{m-1} \cdot (2^{m-2} + 2^{m-3} + ... + 2^0) + 3 \cdot 2^m \cdot (2^{m-2} + 2^{m-3} + ... + 2^0)$

$= c_{2m-2} + 3 \cdot 2^{m-1} \cdot (2^{m-1} - 1) + 3 \cdot 2^m \cdot (2^{m-1} - 1)$

$= c_{2m-2} + 3 \cdot 2^{2m-2} - 3 \cdot 2^{m-1} + 3 \cdot 2^{2m-1} - 3 \cdot 2^m$

$= c_{2m-2} + 9 \cdot 2^{2m-2} - 9 \cdot 2^{m-1}$

$= (c_{2m-4} + 9 \cdot 2^{2m-4} - 9 \cdot 2^{m-2}) + 9 \cdot 2^{2m-2} - 9 \cdot 2^{m-1}$

$= ... = c_2 + 9 \cdot (2^{2m-2} + 2^{2m-4} + ... + 2^2) - 9 \cdot (2^{m-1} + 2^{m-2} + ... + 2^1)$

$= 36 \cdot (2^{2m-4} + 2^{2m-6} + ... + 2^0) - 18 \cdot (2^{m-2} + 2^{m-3} + ... + 2^0)$

$\stackrel{(2)}{=} 36 \cdot (4^{m-2} + 4^{m-3} + ... + 4^0) - 18 \cdot (\frac{2^{m-1} - 1}{2 - 1})$

$\stackrel{(2)}{=} 36 \cdot (\frac{4^{m-1} - 1}{4 - 1}) - 9 \cdot 2^m + 18$

$= 3 \cdot 2^{2m} - 12 - 9 \cdot 2^m + 18$

Also erhalten wir $c_n = 3 \cdot 2^n - 9 \cdot 2^{(n/2)} + 6$ für gerade n.

Wenn wir nun die erhaltenen Lösungen für ungerade n in $M(n) = 3 \cdot a_n + 3 \cdot b_n + c_n$ einsetzen, erhalten wir:
$M(n) = 3 + 3 \cdot (2^{(n+3)/2} - 4) + 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{(n+3)/2} + 6 = 3 \cdot (2^n - 1)$;
Nun setzen wir die erhaltenen Lösungen für gerade n ein:
$M(n) = 3 + 3 \cdot (3 \cdot 2^{(n/2)} - 4) + 3 \cdot 2^n - 9 \cdot 2^{(n/2)} + 6 = 3 \cdot (2^n - 1)$;
Also gilt für gerade **und** ungerade n stets die Formel:

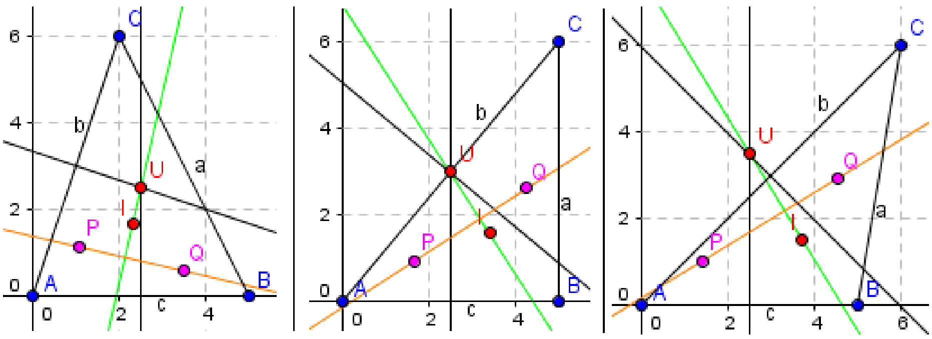
$$M(n) = 3 \cdot (2^n - 1)$$

$\square$

Lösung zu Aufgabe 4

Bemerkung: Im Folgenden sei mit $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen gemeint, also $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Gegeben ist ein Dreieck ABC, welches in einem kartesischen Koordinatensystem liege und wo der Inkreismittelpunkt I vom Umkreismittelpunkt U verschieden ist. Der Ursprung wird mit O bezeichnet; jeder Punkt X in der Ebene wird durch den Vektor $\overrightarrow{OX}$ beschrieben. O.B.d.A. wählen wir als Ursprung den Punkt A und die x-Achse legen wir durch AB (siehe Abbildung). Dies dürfen wir machen, da es sich hier um ein kartesisches Koordinatensystem handelt. Dies impliziert, dass sich die Seitenlängen und die Winkel des Dreiecks nicht durch Verschiebungen, Drehungen oder Spiegelungen ändern.
Die Eckpunkte des Dreieck ABC werden nun durch folgende Vektoren beschrieben:
$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.



Nun ziehen wir einige Tatsachen heran, die wir aus der Schule kennen:
Seien zwei Vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gegeben.
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ lässt sich berechnen durch $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ (1).
Nun betrachten wir das Skalarprodukt beider Vektoren; dieser ist

gegeben durch $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$. Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist gleich Null **genau dann, wenn** die Vektoren senkrecht aufeinander liegen. (2)
Der Inkreismittelpunkt I ist der Schnittpunkt aller drei Winkelhalbierenden (3).
Wir betrachten ein Dreieck ABC mit den gegenüberliegenden Seitenlängen a_1, b_1 und c_1. Die Koordinaten seien $A = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$. Nun kann man I durch die Formel $I = \begin{pmatrix} (a_1x_a + b_1x_b + c_1x_c)/(a_1 + b_1 + c_1) \\ (a_1y_a + b_1y_b + c_1y_c)/(a_1 + b_1 + c_1) \end{pmatrix}$ bestimmen (4).
Der Umkreismittelpunkt U ist der Schnittpunkt aller drei Mittelsenkrechten (5).

Der Mittelpunkt der Strecke zweier Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ lässt sich durch das arithmetische Mittel $(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix})/2 = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1)/2 \\ (a_2 + b_2)/2 \end{pmatrix}$ berechnen (6).
Die Parameterdarstellung einer Geraden, die durch zwei Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ geht, hat die Form $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot t + \overrightarrow{OA}$, wobei t alle reellen Zahlen annimmt. Ferner können wir das konstante Glied (hier $\overrightarrow{OA}$) durch ein anderen Punkt ersetzen, der auf der Geraden liegt (z.B. $\overrightarrow{OB}$) (7).
Gegeben seien zwei lineare Funktionen mit der Steigung m_1 und m_2. Diese Geraden liegen senkrecht aufeinander **genau dann, wenn** $m_1 \cdot m_2 = -1$ (8)

Der Abstand d zwischen einem Punkt $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und einer Geraden $a(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ im 3-Dimensionalen lässt sich be-

rechnen durch $d = \frac{|\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix})|}{|\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}|}$ (9), wobei $\times$ das Kreuzprodukt sein soll und der Betrag eines Vektors die Länge des Vektors sein soll.
Der Betrag lässt sich berechnen, indem man jede einzelne Komponente quadriert und die Wurzel aus der Summe der quadrierten Komponenten zieht. D.h. $|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren wird wie folgt definiert:
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$
Es gilt die Identität $|a - b| = max\{a, b\} - min\{a, b\}$ (10).
Kommen wir nun zur ursprünglichen Aufgabe:
Als erstes bestimmen wir die Parameterdarstellung der Geraden, die durch zwei der drei Eckpunkte geht (siehe (7)):
Durch A und B: $f(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
Durch B und C: $g(t) = \begin{pmatrix} y - x \\ z \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$;
Durch A und C: $h(t) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
Nun bestimmen wir den Umkreismittelpunkt U. Der liegt nach (5) auf der Mittelsenkrechten von a. Also ist die x-Koordinate von U gleich $\frac{x}{2}$. Wir bestimmen nun die Funktion $m(t)$, die die Mittelsenkrechte auf $\overline{AC}$ beschreibt. Doch vorher bestimmen wir die Funktion $k(t)$, die durch A und C geht (diese beiden Geraden liegen natürlich nicht senkrecht auf der x-Achse, weil $y, z \in \mathbb{R}^+$, weswegen wir sie als Funktionen beschreiben können). Offensichtlich ist die Funktion $k(t)$ gegeben durch $k(t) = \frac{z}{y} \cdot t$ (der Leser überzeuge sich durch einfaches einsetzen). Nun muss $m(t)$ durch $\begin{pmatrix} y/2 \\ z/2 \end{pmatrix}$ gehen, da dies nach (6) die Mitte der Strecke $\overline{AC}$ ist und senkrecht auf $k(t)$ liegen, sodass alle Bedingungen an $m(t)$ erfüllt sind.

Mithilfe von (8) folgt $m(t) = -\frac{y}{z} \cdot t + \frac{y^2+z^2}{2z}$, denn nach (8) liegen die Geraden senkrecht aufeinander und es gilt $m(y/2) = z/2$. Nun müssen wir $t = x/2$ setzen, um die y-Koordinate von U zu erhalten: $m(x/2) = \frac{y^2+z^2-xy}{2z}$. Insgesamt folgt also:

$$\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} x/2 \\ (y^2+z^2-xy)/(2z) \end{pmatrix}$$

Jetzt bestimmen wir die Koordinaten des Punktes I mit Hilfe von (4).
Vorerst bestimmen wir die Seitenlängen a_1, b_1 und c_1:
$a_1 = |\overrightarrow{BC}| = |\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} y-x \\ z \end{pmatrix}| = \sqrt{(y-x)^2+z^2} =: \xi_1$
$b_1 = |\overrightarrow{AC}| = |\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}| = \sqrt{y^2+z^2} =: \xi_2$
$c_1 = |\overrightarrow{AB}| = |\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = \sqrt{x^2} = |x| = x$, da $x \in \mathbb{R}^+$
Des Weiteren ist $x_a = y_a = y_b = 0$, $x_b = x$, $x_c = y$ und $y_c = z$. Hieraus folgt:

$$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} x \cdot (\xi_2 + y)/(x + \xi_1 + \xi_2) \\ xz/(x + \xi_1 + \xi_2) \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun den Punkt $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, der im Inneren des Dreiecks liegt (die Bedingungen an a bzw. b werden in den folgenden Fallunterscheidungen berechnet, sodass P echt im Dreieck ABC liegt) und rechnen den Abstand zu den drei Dreiecksseiten aus; hierzu benutzen wir (9). Dies können wir machen, da wir die Parameterdarstellung und den Punkt ins 3-Dimensionale einbetten können. D.h. wir erhalten den Punkt P mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir erhalten die neuen Parameterdarstellungen der drei Geraden:
Durch A und B: $f(t) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
Durch B und C: $g(t) = \begin{pmatrix} y-x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Durch A und C: $h(t) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
Fangen wir mit dem Abstand d_f zwischen $f(t)$ und P an:
Dieser ist natürlich gleich b, da die y-Koordinate von P eben b ist und $f(t)$ die x-Achse beschreibt, also $d_f = b$.
Nun folgt der Abstand d_g zwischen $g(t)$ und P:

$$d_g = \frac{|\begin{pmatrix} y-x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \times (\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})|}{|\begin{pmatrix} y-x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}|} = \frac{\sqrt{(by+xz-bx-az)^2}}{\xi_1}$$

$$= \frac{|by+xz-bx-az|}{\xi_1}.$$

Zuletzt bestimmen wird noch den Abstand d_h zwischen $h(t)$ und P:

$$d_h = \frac{|\begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \times (\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})|}{|\begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}|} = \frac{\sqrt{(by-az)^2}}{\xi_2} = \frac{|by-az|}{\xi_2}.$$

Insgesamt folgt $d(P) = d_f + d_g + d_h = b + \frac{|by+xz-bx-az|}{\xi_1} + \frac{|by-az|}{\xi_2}$.

Nun betrachten wir einen von P verschiedenen Punkt $Q = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ mit $d(Q) = d + \frac{|dy+xz-dx-cz|}{\xi_1} + \frac{|dy-cz|}{\xi_2}$, da wir einfach a durch c und b durch d ersetzen können. Nach Aufgabenstellung gilt $d(P) = d(Q)$. Diese Gleichung werden wir durch Fallunterscheidungen nach c auflösen.

***1. Fall* $x > y$:** Hierzu betrachten wir die Abbildung 1.
Nach Bedingung müssen P und Q **echt im** Dreieck liegen. Wir rechnen die Bedingungen für P aus und übertragen diese auf Q, sodass wir die Bedingungen für Q auch haben. Die x-Koordinate von P muss echt zwischen Null und x liegen (da $x > y$), also $0 < a < x$. Ferner muss in diesem Fall die y-Koordinate von P größer Null und kleiner als die beiden Geraden $g(t)$ und $h(t)$ an der Stelle a sein. Wir rechnen nun die beiden Punkte auf den Geraden aus, mit Stelle a: $g((a-x)/(y-x)) = \begin{pmatrix} a \\ z\cdot(a-x)/(y-x) \end{pmatrix}$ bzw. $h(a/y) = \begin{pmatrix} a \\ za/y \end{pmatrix}$.
Also muss $0 < b < z \cdot (a-x)/(y-x)$ und $0 < b < za/y$ gelten. Wir multiplizieren nun die erste Ungleichung mit $(x-y) > 0$ und erhalten nach einigen Umformungen $bx + az < by + xz$. Aus der zweiten Ungleichung folgt $by < az$. Also erhalten wir mit (10) und den beiden Ungleichungen $d(P) = b + \dfrac{by + xz - bx - az}{\xi_1} + \dfrac{az - by}{\xi_2}$. Für Q erhalten wir dann $d(Q) = d + \dfrac{dy + xz - dx - cz}{\xi_1} + \dfrac{cz - dy}{\xi_2}$, da an Q exakt die selben Bedingungen gelten wie bei P. Nach Aufgabenstellung muss $d(P) = d(Q)$ gelten. Wir multiplizieren mit $\xi_1\xi_2$ und erhalten: $b\xi_1\xi_2 + by\xi_2 + xz\xi_2 - bx\xi_2 - az\xi_2 + az\xi_1 - by\xi_1 = d\xi_1\xi_2 + dy\xi_2 + xz\xi_2 - dx\xi_2 - cz\xi_2 + cz\xi_1 - dy\xi_1$
$\Leftrightarrow (b-d)\cdot(\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1) + az(\xi_1 - \xi_2) = cz(\xi_1 - \xi_2)(1*)$
Hierzu unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

***1.1. Fall* $\xi_1 = \xi_2$:**
Schreiben wir obige Gleichung aus, erhalten wir $\sqrt{(y-x)^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + z^2}$, was äquivalent ist zu $x = 2y$. Also wird $(1*)$ zu:
$(b-d)\cdot\xi_1\cdot(\xi_1 - x) = 0$
Da $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{y^2+z^2} > 0$, folgt $(b-d)\cdot(\xi_1 - x) = 0$.
Hier nehmen wir nun wieder eine Fallunterscheidung durch:

***1.1.1. Fall* $\xi_1 = x$:**
Es gilt also $\sqrt{y^2+z^2} = x$, mit $y = \dfrac{x}{2}$. Hieraus folgt also $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot x$. Wir haben also die Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} x/2 \\ x\cdot\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Rechnen wir nun die Seitenlängen des Dreiecks aus, erhalten wir für jede Seite die Länge x:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2} = x;$
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4}} = \sqrt{x^2} = x;$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\frac{(-x)^2}{4} + \frac{3x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4}} = \sqrt{x^2} = x;$
Folglich ist das Dreieck ein gleichseitiges Dreieck, wo die Winkelhalbierende mit der Mittelsenkrechte des gegenüberliegenden Winkels zusammenfallen, d.h. nichts anderes als, dass der Umkreismittelpunkt mit dem Inkreismittelpunkt zusammenfällt, was der Aufgabenstellung nicht genügt.

1.1.2. Fall $\xi_1 \neq x$**:**
Da $\xi_1 \neq x$ folgt sofort $b = d$. Setzen wir nun in die x-Koordinate von U und I die Bedingung $x = 2y$ ein (bzw. $\xi_1 = \xi_2$), erhalten wir für beide x-Koordinaten den Wert y:
x-Koordinate von U: $\frac{x}{2} = y;$
x-Koordinate von I: $x \cdot (\xi_2 + y)/(x + \xi_1 + \xi_2)$
$= 2y \cdot (\xi_1 + y)/(2 \cdot (y + \xi_1)) = y$
Folglich liegt die Gerade durch U und I senkrecht auf der x-Achse und da $b = d$ muss die Gerade, welche durch die beiden Punkte P und Q geht, parallel zur x-Achse sein. Woraus folgt, dass $\overrightarrow{UI}$ senkrecht auf $\overrightarrow{PQ}$ liegt.

1.2 Fall $\xi_1 \neq \xi_2$**:**
Aus (1∗) wird nun $\frac{(b-d) \cdot (\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1)}{z(\xi_1 - \xi_2)} + a = c$ (wir bemerke, dass $b \neq d$, da sonst aus $b = d$ die Gleichung $a = c$ folgt und womit P und Q zusammenfallen). Nun bilden wir das Skalarprodukt aus $\overrightarrow{UI}$ und $\overrightarrow{PQ}$ und setzen dies gleich Null. Durch äquivalente Umformungen zeigen wir, dass die Gleichung äquivalent ist zu $0 = 0$, sodass wir gezeigt haben, dass das Skalarprodukt gleich Null ist, woraus folgt, dass die beiden Vektoren senkrecht aufeinander liegen.

$\overrightarrow{UI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} x \cdot (\xi_2 + y)/(x + \xi_1 + \xi_2) \\ xz/(x + \xi_1 + \xi_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x/2 \\ (y^2 + z^2 - xy)/(2z) \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} x \cdot (\xi_2 + y)/(x + \xi_1 + \xi_2) - x/2 \\ xz/(x + \xi_1 + \xi_2) - (y^2 + z^2 - xy)/(2z) \end{pmatrix}$ (2∗)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} (b-d) \cdot (\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1)/(z(\xi_1 - \xi_2)) + a \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (b-d) \cdot (\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1)/(z(\xi_1 - \xi_2)) \\ d - b \end{pmatrix}$ (3∗)

Nun multiplizieren wir (2∗) mit (3∗) und setzen dies gleich Null und formen äquivalent um. Zur Erinnerung:
$\xi_1 := \sqrt{(y-x)^2 + z^2} \Leftrightarrow \xi_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy$ (A)
$\xi_2 := \sqrt{y^2 + z^2} \Leftrightarrow \xi_2^2 = y^2 + z^2$ (B)
Fangen wir nun an umzuformen:
$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{UI} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{UI} \cdot 2 \cdot z \cdot (\xi_1 - \xi_2) \cdot (x + \xi_1 + \xi_2) = 0$

$\Leftrightarrow [2 \cdot x \cdot (\xi_2 + y) - x \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)] \cdot [(b-d) \cdot (\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1)]$
$+ [d-b] \cdot [xz \cdot 2 \cdot z \cdot (\xi_1 - \xi_2) - (y^2 + z^2 - xy) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)] = 0$

$\Leftrightarrow [2 \cdot x \cdot (\xi_2 + y) - x \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)] \cdot (\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1)$
$-[xz \cdot 2 \cdot z \cdot (\xi_1 - \xi_2) - (y^2 + z^2 - xy) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)] = 0$

$\Leftrightarrow [2x\xi_2 + 2xy - x^2 - x\xi_1 - x\xi_2] \cdot [\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1]$
$+[(y^2 + z^2 - xy) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)] - 2xz^2\xi_1 + 2xz^2\xi_2 = 0$ (4∗).

Die ersten beiden Summanden rechnen wird nun einzeln aus, sodass man das Ausmultiplizieren nachvollziehen kann. Wir verweisen nochmal auf (A) und (B).

$[2x\xi_2 + 2xy - x^2 - x\xi_1 - x\xi_2] \cdot [\xi_1\xi_2 + y\xi_2 - x\xi_2 - y\xi_1]$

$= 2x\xi_1 y^2 + 2x\xi_1 z^2 + 2xyy^2 + 2xyz^2 - 2xxy^2 - 2xxz^2 - 2x\xi_2 y\xi_1$
$+2xy\xi_1\xi_2 + 2xyy\xi_2 - 2xyx\xi_2 - 2xyy\xi_1 - x^2\xi_1\xi_2 - x^2y\xi_2 + x^2x\xi_2 + x^2y\xi_1$
$-x\xi_2 x^2 - x\xi_2 y^2 - x\xi_2 z^2 + x\xi_2 2xy - x\xi_1 y\xi_2 + x\xi_1 x\xi_2 + xyx^2 + xyy^2$
$+xyz^2 - xy2xy - x\xi_1 y^2 - x\xi_1 z^2 - xyy^2 - xyz^2 + xxy^2 + xxz^2 + x\xi_1 y\xi_2$

$= xz^2\xi_1 + 2xy^3 + 2xyz^2 - x^2z^2 + xy^2\xi_2 - x^2y\xi_2 + x^2y\xi_1 - xz^2\xi_2$
$+x^3y - 3x^2y^2 - xy^2\xi_1$ (4∗′)

Kommen wir zum zweiten Summanden:
$(y^2 + z^2 - xy) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)$

$= (y^2\xi_1 - y^2\xi_2 + z^2\xi_1 - z^2\xi_2 - xy\xi_1 + xy\xi_2) \cdot (x + \xi_1 + \xi_2)$

$= y^2\xi_1 x + y^2x^2 + y^2y^2 + y^2z^2 - y^2 2xy + y^2\xi_1\xi_2 - y^2\xi_2 x - y^2\xi_2\xi_1$
$-y^2y^2 - y^2z^2 + z^2\xi_1 x + z^2x^2 + z^2y^2 + z^2z^2 - z^2 2xy + z^2\xi_1\xi_2 - z^2\xi_2 x$
$-z^2\xi_2\xi_1 - z^2y^2 - z^2z^2 - xy\xi_1 x - xyx^2 - xyy^2 - xyz^2 + xy2xy$
$-xy\xi_1\xi_2 + xy\xi_2 x + xy\xi_2\xi_1 + xyy^2 + xyz^2$

$= xy^2\xi_1 + 3x^2y^2 - 2xy^3 - xy^2\xi_2 + xz^2\xi_1 + x^2z^2 - 2xyz^2 - xz^2\xi_2$
$-x^2y\xi_1 - x^3y + x^2y\xi_2$ $(4*'')$

Wenn wir nun $(4*')$ und $(4*'')$ in $(4*)$ einsetzen, erhalten wir:
$(xz^2\xi_1 + 2xy^3 + 2xyz^2 - x^2z^2 + xy^2\xi_2 - x^2y\xi_2 + x^2y\xi_1 - xz^2\xi_2$
$+x^3y - 3x^2y^2 - xy^2\xi_1) + (xy^2\xi_1 + 3x^2y^2 - 2xy^3 - xy^2\xi_2 + xz^2\xi_1$
$+x^2z^2 - 2xyz^2 - xz^2\xi_2 - x^2y\xi_1 - x^3y + x^2y\xi_2) - 2xz^2\xi_1 + 2xz^2\xi_2 = 0$
$\Leftrightarrow 0 = 0$

Womit wir gezeigt haben, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ist, woraus folgt, dass die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{UI}$ senkrecht aufeinander stehen für den Fall $x > y$.

2. Fall** $x = y$:** Hierzu betrachten wir die Abbildung 2.
Auch hier berechnen wir die Bedingungen für P aus und übertragen sie aus Q. Die x-Koordinate liegt echt zwischen Null und $x = y$, also $0 < a < y$. Die y-Koordinate muss echt größer Null und echt kleiner als die y-Koordinate der Geraden $h(t)$ an der Stelle a sein, was $h(a/y) = \begin{pmatrix} a \\ za/y \end{pmatrix}$ ist. Wir erhalten insgesamt die Ungleichungen $0 < a < y$ und $by < az$. Übertragen wir dies auf Q erhalten wir $0 < c < y$ und $dy < cz$.
Aus $d(P) = d(Q)$ wird nun mit $x = y$ (also auch $\xi_1 = \sqrt{z^2} = z$):

$$b + (y - a) + \frac{az - by}{\xi_2} = d + (y - c) + \frac{cz - dy}{\xi_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b - d) \cdot (\xi_2 - y)}{z - \xi_2} + a = c, \text{ da } z \neq \xi_2 = \sqrt{y^2 + z^2}$$

Wir berechnen nun wieder das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{UI}$ und $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{UI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} y \cdot (\xi_2 + y)/(y + z + \xi_2) \\ yz/(y + z + \xi_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y/2 \\ z/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot (\xi_2 + y)/(y + z + \xi_2) - y/2 \\ yz/(y + z + \xi_2) - z/2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} (b - d) \cdot (\xi_2 - y)/(z - \xi_2) + a \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (b - d) \cdot (\xi_2 - y)/(z - \xi_2) \\ d - b \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung:

$$\xi_1 := \sqrt{(y - x)^2 + z^2} = z$$

$$\xi_2 := \sqrt{y^2 + z^2} \Leftrightarrow \xi_2^2 = y^2 + z^2 \text{ (B)}$$

Fangen wir nun an umzuformen:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{UI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{UI} \cdot 2 \cdot (z - \xi_2) \cdot (y + z + \xi_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(b - d) \cdot (\xi_2 - y)] \cdot [2 \cdot y \cdot (\xi_2 + y) - y \cdot (y + z + \xi_2)]$$
$$+ [(d - b)] \cdot (z - \xi_2) \cdot [2 \cdot yz - z \cdot (y + z + \xi_2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b\xi_2 - by - d\xi_2 + dy) \cdot (y\xi_2 + y^2 - yz)$$
$$+ (dz - d\xi_2 - bz + b\xi_2) \cdot (yz - z^2 - z\xi_2) = 0 \text{ } (1**)$$

Die multiplizieren die beiden Summanden wieder einzeln aus, unter Beachtung von (B):
$(b\xi_2 - by - d\xi_2 + dy) \cdot (y\xi_2 + y^2 - yz)$

$= byy^2 + byz^2 + b\xi_2 y^2 - b\xi_2 yz - byy\xi_2 - byy^2 + byyz - dyy^2$
$-dyz^2 - d\xi_2 y^2 + d\xi_2 yz + dyy\xi_2 + dyy^2 - dyyz$

$= byz^2 - byz\xi_2 + by^2 z - dyz^2 + dyz\xi_2 - dy^2 z \; (2**)$

Aus dem zweiten Summand erhalten wir:
$(dz - d\xi_2 - bz + b\xi_2) \cdot (yz - z^2 - z\xi_2)$

$= dzyz - dzz^2 - dzz\xi_2 - d\xi_2 yz + d\xi_2 z^2 + dzy^2 + dzz^2 - bzyz + bzz^2 + bzz\xi_2 + b\xi_2 yz - b\xi_2 z^2 - bzy^2 - bzz^2$

$= dyz^2 - dyz\xi_2 + dy^2 z - byz^2 + byz\xi_2 - by^2 z \; (3**)$

Wir sehen sofort, dass das Einsetzen von $(2**)$ und $(3**)$ in $(1**)$ die Gleichung $0 = 0$ hervorbringt, womit wir gezeigt haben, dass das Skalarprodukt gleich Null ist und die Vektoren senkrecht aufeinander liegen.

***3. Fall** $x < y$*: Hierzu betrachten wir die Abbildung 3.
Zu guter Letzt berechnen wir noch einmal die Bedingungen an P aus und übertragen diese auf Q. Die x-Koordinate liegt echt zwischen Null und y (da $y > x$), also $0 < a < y$. Die y-Koordinate ist nun größer als Null, größer als $g(t)$ an der Stelle a und kleiner als $h(t)$ an der Stelle a:
$g((a-x)/(y-x)) = \begin{pmatrix} a \\ z \cdot (a-x)/(y-x) \end{pmatrix}$ bzw. $h(a/y) = \begin{pmatrix} a \\ za/y \end{pmatrix}$.
Also muss $b > z \cdot (a-x)/(y-x)$ und $0 < b < za/y$ gelten. Wir multiplizieren nun die erste Ungleichung mit $(y-x) > 0$ und erhalten nach einigen Umformungen $bx + az < by + xz$. Aus der zweiten Ungleichung folgt $by < az$, was exakt die gleichen Bedingungen an P sind (also auch an Q), wie im Fall 1. Nun können wir genau wie in Fall 1. vorgehen, wobei wir den Fall 1.1 nicht betrachten müssen, da $\xi_1 = \xi_2$ äquivalent ist zu $x = 2y$, aber $2y = x < y \Leftrightarrow y < 0$, was die Bedingung an y widerspricht (da $y \in \mathbb{R}^+$). Für $\xi_1 \neq \xi_2$ erhalten wir wie in Fall 1.2, dass das Skalarprodukt der Vektoren gleich Null ist, womit wir gezeigt haben, dass in allen Fällen das Skalarprodukt gleich Null ist bzw. dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

$\square$