Hilfsmittel

GeoGebra, Paint, MO-Training (bei Herrn Broelemann)

Lösung zu Aufgabe 1

Die Zahl 101010...0101 besteht aus $2016 \cdot 2 + 1$ Ziffern, da sie nach Voraussetzung aus 2016 Nullen besteht. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
&101010...0101 \\
&= 10^0 + 10^2 + 10^4 + ... + 10^{2016 \cdot 2} \\
&= (10^2)^0 + (10^2)^1 + (10^2)^2 + ... + (10^2)^{2016} \\
&= \frac{(10^2)^{2017} - 1}{10^2 - 1} \\
&= \frac{(10^{2017})^2 - 1}{9 \cdot 11} \\
&= \left(\frac{10^{2017} + 1}{11} \right) \cdot \left(\frac{10^{2017} - 1}{9} \right),
\end{aligned}$$

wobei beide Quotienten offensichtlich größer als Eins und ganzzahlig sind, da

$$10^{2017} + 1 \equiv (-1)^{2017} + 1 = 0 \pmod{11}$$

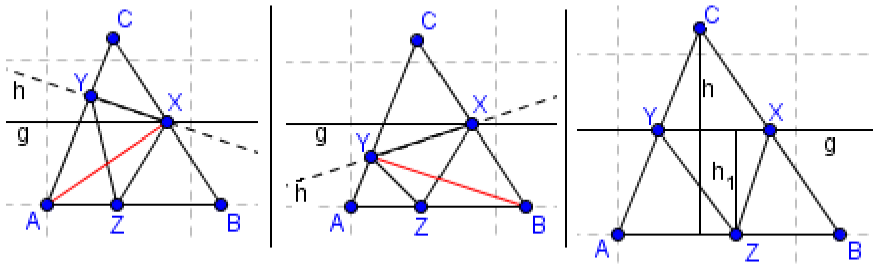
und

$$10^{2017} - 1 \equiv 1^{2017} - 1 = 0 \pmod{9}.$$

$\square$

Lösung zu Aufgabe 2

Wir betrachten folgende drei Abbildungen:



Wir unterscheiden nun zwischen drei Fällen bzgl. der Lage vom Punkt Y. Sei g die Parallele zur Strecke $\overline{AB}$, welche durch X verläuft und sei h die Gerade, welche durch X und Y verläuft (siehe Abbildung).

1.Fall: Der Punkt Y befindet sich bezüglich g auf der selben offenen Halbebene wie der Punkt C (siehe Abbildung 1).

Wir fixieren nun die Punkte X und Y und wählen Z so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ maximal wird.

Wenn wir nun vom Abstand zwischen einem Punkt P und einer Geraden g sprechen, dann meinen wir den Abstand zwischen P und dem Fußpunkt des Lotes von P auf der Geraden g, also wie es allgemein bekannt ist.

Es ist nun offensichtlich, dass der Abstand zwischen Z und der Geraden h immer größer wird, wenn Z sich A immer weiter annähert (siehe Abbildung 1). Dementsprechend wird auch die Fläche des Dreiecks XYZ stets größer, da wir die Strecke $\overline{XY}$ als Grundseite betrachten können, welche fest bleibt und durch die Verschiebung von Z gerade die Höhe des Dreiecks XYZ zur Grundseite $\overline{XY}$ größer wird (die Fläche eines Dreiecks ist gegeben durch die Grundseite multipliziert mit der Höhe geteilt durch zwei). Wir können also annehmen, dass Z auf A liegt, auch wenn dies der Aufgabenstellung widerspricht, aber wir werden nachher sehen, dass die Lage von Z irrelevant ist.

Seien nun die Punkte X und Z fix, wobei Z auf A liegt. Wir wähle Y so, dass die Fläche des Dreiecks XYZ minimal wird.

Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt, dass der Flächeninhalt minimal wird, wenn wir Y der Geraden g beliebig nahe annähern, da die Höhe zur Grundseite $\overline{XZ}$ bzw. $\overline{XA}$ kleiner wird (siehe Abbildung 1). Wir können also annehmen, dass Y auf g liegt, woraus folgt, dass der erste Fall zum dritten Fall identisch ist, wo Y auf g liegt (siehe Abbildung 3).

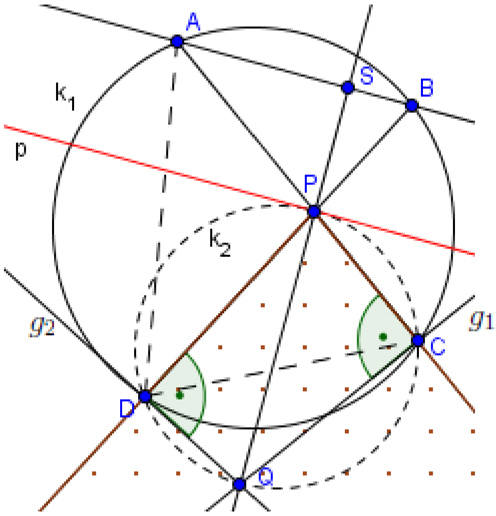
2.Fall: Der Punkt Y befindet sich bezüglich g auf der selben offenen Halbebene wie die Punkte A und B (siehe Abbildung 2).
Analog wie oben folgt, dass die Fläche maximal wird, wenn Z auf B liegt und minimal, wenn Y auf g liegt. Also reicht es auch hier aus den dritten Fall zu betrachten.

3.Fall: Der Punkt Y befindet sich auf der Geraden g.
Offensichtlich ist es irrelevant wie wir Z wählen, da die Höhe des Dreiecks XYZ zur Grundseite $\overline{XY}$ stets gleich bleibt. Ferner ist Y fest gegeben durch X, d.h. die Fläche des Dreiecks XYZ hängt nur noch von X ab. Dieses X wählen wir nun so, dass die Fläche des Dreiecks XYZ maximal wird:
Wir bezeichnen die Höhe der Dreiecks ABC zur Grundseite $\overline{AB}$ mit h und sei $0 < h_1 < h$ die Höhe des Dreiecks XYZ zur Grundseite $\overline{XY}$ (siehe Abbildung 3). Nun gilt nach Voraussetzung $\frac{|\overline{AB}| \cdot h}{2} = 1$ bzw. $|\overline{AB}| = \frac{2}{h}$ (1). Wir definieren $x := |\overline{XY}|$. Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{|AB|}{h} = \frac{x}{h - h_1}$ (2). Setzen wir nun (1) in (2) ein, dann folgt $\frac{2}{h^2} = \frac{x}{h - h_1}$ bzw. $\frac{2}{h^2} \cdot (h - h_1) = x$ (3). Wir möchten nun das $A_{XYZ} = \frac{x \cdot h_1}{2}$ (4) maximal wird. Erst setzen wir (3) in (4) ein und erhalten $A_{XYZ} = \frac{h_1}{h} - \frac{h_1^2}{h^2}$. Es gilt nun $A_{XYZ} \leq \frac{1}{4}$, da es äquivalent zu $(\frac{h_1}{h} - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ ist, was offensichtlich stimmt. Für $h_1 = \frac{h}{2}$ wird das Maximum angenommen. Also hat das Dreieck XYZ den Flächeninhalt von $\frac{1}{4}$, wenn Anja und Bernd optimal spielen.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 3

Wir betrachten folgende Abbildung, die der Aufgabenstellung entspricht:



Es ist offensichtlich, dass der Punkt P stets existiert. Nun zeigen wir, dass auch der Punkt Q stets existiert:
Sei g_1 die Senkrechte auf $\overline{AC}$ im Punkt C und g_2 die Senkrechte auf $\overline{BD}$ im Punkt D. Nehmen wir an $g_1 \parallel g_2$, dann folgt aus $\overline{AC} \perp g_1$, dass $\overline{AC} \perp g_2$. Ferner gilt nach Aufgabenstellung $\overline{BD} \perp g_2$, also $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, was aber nicht sein kann, da sie sich in P schneiden.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von der Geraden $\overline{QP}$ und $\overline{AB}$ mit S (siehe Abbildung). Auch hier zeigen wir erst, dass S existiert:
Sei p die Parallele zur Strecke $\overline{AB}$, welche durch den Punkt P verläuft und sei E die geschlossene Halbebene, welche durch die Strahlen $\overline{PD}$ über D hinaus und durch $\overline{PC}$ über C hinaus begrenzt wird (siehe Abbildung [die gepunktete Fläche]). Es ist offensichtlich, dass Q in E liegt. Die Gerade p verläuft nun nur im Punkt P durch E, d.h. kein weiterer Punkt auf p liegt in E, da zwei Geraden maximal einen Schnittpunkt haben. Nehmen wir nun an $\overline{QP}$ liegt auf p (ist also parallel zu $\overline{AB}$), dann muss aus obigem folgen, dass Q mit P zusammenfällt, da Q auf p liegen muss und gleichzeitig in E liegt. Das hieße aber, dass der Schnittpunkt der Orthogonalen im Punkt D zur Strecke $\overline{BD}$ bzw. $\overline{PD}$ und der Orthogonalen

im Punkt C zur Strecke $\overline{AC}$ bzw. $\overline{PC}$ gerade P ist. Also liegt die Orthogonale im Punkt D zur Strecke $\overline{PD}$ auf $\overline{PD}$, was unmöglich ist, also ein Widerspruch. Der Punkt S existiert also.
Wir benutzen nun folgende zwei Sätze, die aus dem Mathe-Olympiade-Training (bei Herrn Broelemann) bekannt sind:
Satz 1: Ist in einem Viereck die Summe gegenüberliegender Winkel 180 Grad, so ist es ein Sehnenviereck, dh. das Viereck liegt auf einem Kreis.
Satz 2: (Peripheriewinkelsatz)
Alle Peripheriwinkel (in der gleichen Halbebene) über dem gleichen Kreisbogen sind gleichgroß.

Nun ist nach Aufgabenstellung $\measuredangle PCQ = \measuredangle QDP = 90°$, weswegen nach *Satz 1* das Viereck $CPDQ$ auf einem Kreis liegt. Nun gilt mit *Satz 2* $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \measuredangle SBP$ und $\measuredangle DCQ = \measuredangle DPQ = \measuredangle BPS$, da $\measuredangle BPS$ der Scheitelwinkel von $\measuredangle DPQ$ ist. Also erhalten wir $180° = \measuredangle PSB + \measuredangle BPS + \measuredangle SBP = \measuredangle PSB + \measuredangle DCQ + \measuredangle ACD = \measuredangle PSB + 90°$, was äquivalent ist zu $\measuredangle PSB = 90°$. Demzufolge ist die Gerade QP orthogonal zur Geraden AB.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 4

Nach Aufgabenstellung existiert ein Kind, dass die Zahl X an die Tafel geschrieben hat für alle $X \in \{0, 1, ..., 10\}$, und demnach gibt es X andere Kinder, die auch die Zahl X angeschrieben haben. Es haben also $X + 1$ Kinder die Zahl X angeschrieben. Also stehen mindestens $1 + 2 + ... + 11 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$ Zahlen an der Tafel (mit Vielfachheit gezählt). Da wir jedoch wissen, dass es genau 66 Zahlen sind (mit Vielfachheit gezählt), folgern wir, dass dies schon alle Zahlen mit entsprechender Vielfachheit sind: Es stehen also genau die Zahlen aus der Menge $\{0, 1, ..., 10\}$ an der Tafel, wobei die Zahl $X \in \{0, 1, ..., 11\}$ genau $X + 1$ Mal vorkommt.
Schreibt ein Kind nun die Zahl Y bzgl. der ″Vornamen-Zahl″ auf, so schreibt es bzgl. der ″Nachnamen-Zahl″ eine von Y verschiedene Zahl auf. Das folgt aus dem oben Gefolgerten: Würde es bzgl. der ″Nachnamen-Zahl″ auch Y aufschreiben, so würde die Zahl Y mindestens $2(Y + 1)$ Mal vorkommen und nicht $Y + 1$ Mal (wir haben aber oben gezeigt, dass es genau $Y + 1$ Mal vorkommt).
Wir teilen die Kinder in m Mengen auf, wobei m die Anzahl der verschiedenen Vornamen sei. Dabei bestehe jede Menge aus all den Kindern mit dem selben Vornamen. Diese Mengen bezeichnen wir mit $A_1, ..., A_m$. Analog mit den Nachnamen: Die Mengen hier seien $B_1, ..., B_n$. O.B.d.A. haben die 11 Kinder, die die 10 angeschrieben haben, den selben Vornamen, also o.B.d.A. $|A_1| = 11$. Nehmen wir nun an, es gebe gewisse i mit $|A_i| = 8, 9, 10$, dann gäbe es aber mindestens $8+9+10+11 > 33$ Kinder, ein Widerspruch. Damit gibt es also ein j mit $|B_j|$ =8, 9 oder 10. Insbesondere gibt es mindestens 8 Kinder mit dem selben Nachnamen. Wir nehmen nun an, keine zwei Kinder besitzen den selben Vor- und Nachnamen. Wir haben insgesamt m verschiedene Vornamen. Damit folgt dann $m \geq 8$ (da es mindestens 8 Kinder mit dem selben Nachnamen gibt und keine zwei den selben Vor- und Nachnamen haben nach Annahme). Aber $m \geq 8$ heißt $\sum_{i=1}^{m} |A_i| \geq 11 + \sum_{i=2}^{m} |A_i| \geq 11 + (1 + ... + 7) > 33$, Widerspruch, da $\sum_{i=1}^{m} |A_i| = 33$ die Anzahl der Kinder ist.

$\square$