Hilfsmittel

GeoGebra

Lösung zu Aufgabe 1

Für $n = 3$ und $n = 4$ können wir das Tripel $(1, 2, 3)$ respektive das Quadrupel $(1, 2, 3, 5)$ betrachten, denn diese erfüllen offensichtlich die Bedingung der Aufgabenstellung. Doch es existiert kein $n \geq 5$, die der Bedingung der Aufgabenstellung genügt, was wir im Folgenden beweisen werden:
Vorerst bezeichnen wir die n gegebenen Zahlen aufsteigend nach ihrer Größe mit $a_1 < a_2 < ... < a_n$.
Es ist offensichtlich, dass $min(a_i + a_j)= a_1 + a_2$ für $1 \leq i < j \leq n$.
Als zweitkleinste Summe kommt nur $a_1 + a_3$ oder $a_2 + a_3$ in Frage, wobei die erste Summe offensichtlich kleiner ist, weshalb $a_1 + a_3$ die darauffolgende Zahl von $a_1 + a_2$ ist, also $a_1 + a_3 = a_1 + a_2 + 1$
$\Leftrightarrow a_3 = a_2 + 1$ (1).
Analog folgt, dass $max(a_i + a_j)= a_n + a_{n-1}$ für $1 \leq i < j \leq n$ und dass $a_{n-2} + a_n$ die zweitgrößte Summe ist, also
$a_n + a_{n-1} = a_{n-2} + a_n + 1 \Leftrightarrow a_{n-2} + 1 = a_{n-1}$ (2).
Sei nun $n > 5$, dann gilt $a_2 + a_{n-1} \overset{(2)}{=} a_2 + a_{n-2} + 1 \overset{(1)}{=} a_3 + a_{n-2}$ mit $a_{n-1} > a_{n-2} > a_3 > a_2$. Wir sehen also, dass die beiden Summen gleich sind, doch da es $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ aufeinanderfolgende Zahlen sein sollen, müssen sie notwendigerweise paarweise verschieden sein, was hier aber nicht der Fall ist für $n > 5$.
Nun sei $n = 5$:
Mit (1) und (2) erhalten wir $a_3 = a_2 + 1$ und $a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2$.
Ferner ist $a_5 + a_4$ die größte Summe und $a_1 + a_2$ die kleinste, folglich gilt $a_1 + a_2 + 9 = a_5 + a_4 = a_5 + a_2 + 2 \Leftrightarrow a_5 = a_1 + 7$, da es $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ aufeinanderfolgende Zahlen sein sollen und die größte Zahl dementsprechend um Neun größer ist als die kleinste. Wir haben also das Quintupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_1, a_2, a_2 + 1, a_2 + 2, a_1 + 7)$. Nun gilt weiter $a_4 < a_5 \Leftrightarrow a_2 + 2 < a_1 + 7 \Leftrightarrow a_2 < a_1 + 5$ und $a_1 < a_2$.
Folglich kann a_2 nur die Werte $a_1 + k$ für $1 \leq k \leq 4$ annehmen.
Wir betrachten nun alle vier Fälle und zeigen, dass es stets zwei Summen gibt, die gleich sind.

Zum besseren Überblick hier noch mal das Quintupel
$(a_1, a_2, a_2 + 1, a_2 + 2, a_1 + 7)$:
$k = 1 \Rightarrow a_1 + (a_2 + 2) = a_2 + (a_2 + 1)$ mit $a_2 = a_1 + 1$
$k = 2 \Rightarrow (a_2 + 1) + (a_2 + 2) = (a_1 + 7) + a_1$ mit $a_2 = a_1 + 2$
$k = 3 \Rightarrow a_2 + (a_2 + 1) = (a_1 + 7) + a_1$ mit $a_2 = a_1 + 3$
$k = 4 \Rightarrow a_2 + (a_1 + 7) = (a_2 + 1) + (a_2 + 2)$ mit $a_2 = a_1 + 4$
Wie wir sehen, gibt es in allen Fällen zwei gleiche Summanden, was der Aufgabenstellung nicht genügt. Wir haben also gezeigt, dass kein $n \geq 5$ mit der geforderten Bedingung existiert.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 2

Um zu beweisen, dass die Anzahl solcher Zahlen, welche sich nicht als Summe aus einer Dreieckszahl und einer Primzahl darstellen lassen, unendlich ist, führen wir einen Widerspruchsbeweis durch. Dementsprechend nehmen wir also an, dass die Anzahl solcher Zahlen endlich ist. Folglich existiert auch eine größte solcher Zahl unter ihnen, welche wir mit n bezeichnen.
Wir sehen sofort, dass sich die Zahl 2 nicht als Summe aus einer Dreieckszahl und einer Primzahl darstellen lässt, denn
$\dfrac{k\cdot(k+1)}{2}+p\geq 1+2=3$ für $k\in\mathbb{N}_{>0}$ und $p\in prim$. Dies impliziert zugleich $n\geq 2$.
Wir betrachten nun die Ungleichung
$n<1+2+3+...+(n+x)=\dfrac{(n+x)\cdot(n+x+1)}{2}$ (Gaußsche Summenformel) mit einer Variablen $x\in\mathbb{N}_{>0}$. Da obige Summe größer als n ist, muss sie darstellbar sein als Summe aus einer Dreieckszahl und einer Primzahl, also
$\dfrac{(n+x)\cdot(n+x+1)}{2}=\dfrac{k_x\cdot(k_x+1)}{2}+p_x$, $k_x\in\mathbb{N}_{>0}$ und $p_x\in prim$
$\Leftrightarrow n^2+nx+n+xn+x^2+x-k_x^2-k_x=2p_x$
$$\Leftrightarrow (n+x-k_x)\cdot(n+x+k_x+1)=2p_x \tag{1}$$
Es gilt nun $n+x-k_x<n+x+k_x+1$ (2). Ferner besitzt $2p_x$ die Teilermenge $\{1,2,p_x,2p_x\}$ und da $n+x+k_x+1$ die linke Seite der Gleichung (1) teilt, so auch die rechte. Also ist $n+x+k_x+1$ ein Teiler von $2p_x$, insbesondere folgt mit (2), dass $n+x+k_x+1$ nur die beiden Werte $2p_x$ oder p_x annehmen kann und $n+x-k_x$ dementsprechend 1 oder 2.
Im Fall $n+x+k_x+1=2p_x$ und $n+x-k_x=1$ erhalten wir $n=p_x-x=:Y_x$.
Im anderen Fall $n+x+k_x+1=p_x$ und $n+x-k_x=2$ erhalten wir $n=\dfrac{p_x+1-2x}{2}=:Z_x$.
D.h. n nimmt entweder den Wert Y_x oder den Wert Z_x an für ein fixes x.
Wir können außerdem leicht sehen, dass in beiden Fällen p_x stets eine ungerade Primzahl ist für alle $x\in\mathbb{N}_{>0}$, denn im ersten Fall gilt $p_x=n+x\geq 2+1=3$ und im anderen Fall
$p_x=2n+2x-1\geq 2\cdot 2+2\cdot 1-1=5$.
Wir setzen jetzt für x die drei Werte 1, 3 und 5 ein und zeigen durch einen Widerspruch, dass n nicht für alle obigen drei Werte von x

den Wert Z_x annehmen kann: Wir nehmen also das Gegenteil an, dass $n = Z_1 = Z_3 = Z_5$ und erhalten:
$n = \dfrac{p_1 - 1}{2} = \dfrac{p_3 - 5}{2} = \dfrac{p_5 - 9}{2} \Rightarrow p_5 = p_1 + 8 \wedge p_3 = p_1 + 4$
Doch es gilt $p_3 = p_1 + 4 \equiv p_1 + 1 \pmod 3$ und $p_5 = p_1 + 8 \equiv p_1 + 2 \pmod 3$. Wir haben also drei unterschiedliche Restklassen Modulo drei für drei Primzahlen. Folglich muss einer dieser drei Primzahlen durch drei teilbar sein und sogar selbst gleich drei sein, aber nur p_1 kommt in Frage, denn in den beiden anderen Fällen würde p_1 einen negativen Wert annehmen, was unmittelbar aus den Gleichungen hervorgeht. Wir haben also $p_1 = 3$, also auch $n = \dfrac{p_1 - 1}{2} = 1$, was aber wegen $n \geq 2$ nicht geht, Widerspruch. Wir sehen also, dass n nicht für alle drei Werte von x den Wert Z_x annehmen kann, sondern für mindestens einen dieser drei Werte von x den Wert Y_x annimmt.
Wir zeigen nun analog, dass n auch nicht für die drei Werte 2, 4 und 6 für x den Wert Z_x annimmt und dies wieder durch einen Widerspruch:
Wir nehmen also das Gegenteil an und erhalten:
$n = \dfrac{p_2 - 3}{2} = \dfrac{p_4 - 7}{2} = \dfrac{p_6 - 11}{2} \Rightarrow p_6 = p_2 + 8 \wedge p_4 = p_2 + 4$
Mit der gleichen Argumentation wie oben erhalten wir $p_2 = 3$, doch dies ergibt $n = \dfrac{p_2 - 3}{2} = 0$, obwohl $n \geq 2$, Widerspruch.
Wir haben also insgesamt gezeigt, dass n für mindestens ein ungerades x und mindestens ein gerades x den Wert Y_x annimmt (es ist irrelevant wie die beiden x gewählt sind, denn die Existenz solcher x reicht hier völlig aus). Also $n = p_{2a} - 2a = p_{2b-1} - (2b - 1)$ für bestimmte $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$. Da wir schon gezeigt haben, dass p_x in allen Fällen ungerade ist für alle $x \in \mathbb{N}_{>0}$, gilt:
$1 \equiv p_{2a} - 2a = p_{2b-1} - (2b - 1) \equiv 0 \pmod 2$. Somit haben wir den gewünschten Widerspruch und gezeigt, dass die Anzahl der Zahlen, welche sich nicht als Summe aus einer Dreieckszahl und einer Primzahl darstellen lassen, unendlich ist.

$\square$

Lösung zu Aufgabe 3

Vorerst definieren wir $g(x) := \dfrac{x+1}{1-3x}$, was wegen der Nebenbedingung $x \neq 1/3$ wohldefiniert ist.
Offensichtlich nimmt $g(x)$ den Wert $1/3$ nicht an, denn aus $g(x) = 1/3$ folgt $x = -1/3$, was nach Aufgabenstellung nicht im Definitionsbereich liegt. D.h. wir dürfen $g(x)$ in sich selbst einsetzen und erhalten

$$h(x) := g(g(x)) = \frac{\frac{x+1}{1-3x} + 1}{1 - 3 \cdot (\frac{x+1}{1-3x})} = \frac{(x+1)+(1-3x)}{(1-3x)-(3x+3)} = \frac{2-2x}{-2-6x}$$

$= \dfrac{x-1}{3x+1}$, was wegen $x \neq -1/3$ wohldefiniert ist.
Nun nehmen wir an $g(x) = -1/3$, hieraus folgt aber $4 = 0$, was ein Widerspruch ist und deshalb $g(x)$ den Wert $-1/3$ nie annimmt, weswegen folgendes ebenfalls wohldefiniert ist:

$$h(g(x)) = \frac{(\frac{x+1}{1-3x}) - 1}{3(\frac{x+1}{1-3x}) + 1} = \frac{(x+1)-(1-3x)}{(3x+3)+(1-3x)} = x$$

Ebenfalls können wir leicht überprüfen, dass $h(x)$ nie die beiden Werte $1/3$ und $-1/3$ annimmt.
Wir haben nun nach Aufgabenstellung die Funktionalgleichung $f(g(x)) + f(x) = x$ (1) gegeben. Substituieren wir $x \mapsto g(x)$ in (1), dann erhalten wir $f(h(x)) + f(g(x)) = g(x)$ (2). Substituieren wir wieder $x \mapsto g(x)$ in (2), dann erhalten wir $f(x) + f(h(x)) = h(x)$ (3). Eliminieren von $f(h(x))$ aus (2) und (3) führt zu $f(g(x)) + h(x) = g(x) + f(x)$ (4). Addieren von $f(x)$ auf beiden Seiten von (4) führt mit (1) letztendlich zu der Identität

$$f(x) = \frac{h(x) - g(x) + x}{2}$$

Durch eine Probe sehen wir, dass die ursprüngliche Gleichung erfüllt ist, denn $f(g(x)) + f(x) = \dfrac{x - h(x) + g(x)}{2} + \dfrac{h(x) - g(x) + x}{2} = x$.
Eine kurze Rechnung zeigt:

$$f(x) = \frac{9x^3 + 6x^2 - x + 2}{18x^2 - 2}$$

Natürlich ist dies auch die einzige Funktion, die die Funktionalgleichung erfüllt, da die drei Gleichungen (1), (2) und (3) äquivalent sind (was aus dem Zirkelschluss (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) folgt, wenn man stets $x \mapsto g(x)$ in den Gleichungen substituiert) und die Addition bzw. Subtraktion mit den Gleichungen keine
Lösungsmenge vernachlässigt, weil diese beiden Operationen ebenfalls äquivalente Umformungen sind. Es ist also insgesamt

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{9x^3 + 6x^2 - x + 2}{18x^2 - 2}$$

$\square$

Lösung zu Aufgabe 4

Zuerst beweisen wir folgendes Lemma:
Lemma:
Gegeben seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ paarweise verschiedene Ebenen im Raum, welche den Raum in a_n disjunkte Raumteile zerlegen. Nun fügen wir eine $(n+1)te$ Ebene hinzu, welche verschieden von den bisherigen n Ebenen ist. Diese neue Ebene schneidet k von den bereits vorhandenen n Ebenen in x Schnittgeraden. Diese x Schnittgeraden zerlegen die $(n+1)te$ Ebene in y_{n+1} disjunkte Flächenteile. Nun gilt $a_{n+1} = a_n + y_{n+1}$, wir haben jetzt also $a_n + y_{n+1}$ disjunkte Raumteile bei $(n+1)$ Ebenen im Raum.
Beweis:
Für den Beweis benötigen wir drei Hilfslemmata:
Hilfslemma (1):
Durch das hinzufügen der $(n+1)ten$ Ebene entstehen neue disjunkte Raumteile. All diese neu entstandenen disjunkten Raumteile berühren die $(n+1)te$ Ebene bzw. grenzen an der $(n+1)te$ Ebene an.
Beweis:
Dies beweisen wir durch einen Widerspruch:
Wir betrachten einen neu entstandenen disjunkten Raumteil R, der an m Ebenen grenzt bzw. diese berührt und dass unter diesen m Ebenen die $(n+1)te$ Ebene nicht dabei ist.
Wenn wir nun die $(n+1)te$ Ebene wieder verschwinden lassen würden, so müsste auch R verschwinden, doch R ist bloß abhängig von den m Ebenen und somit bleibt R bestehen, was ein Widerspruch ist.

$\square$

Hilfslemma (2):
Durch das Hinzufügen der $(n+1)ten$ Ebene entstehen neue disjunkte Raumteile.
Ein neu entstandener disjunkter Raumteil R kann nur an genau einem disjunkten Flächenteil der $(n+1)ten$ Ebene angrenzen bzw. nur genau einen berühren.
Beweis:
Das zeigen wir durch einen Widerspruch: Wir nehmen also das Gegenteil an, dass R an mindestens zwei disjunkten Flächenteilen F_1 und F_2 der $(n+1)ten$ Ebene angrenzt.

Eine Schnittgerade auf der $(n+1)ten$ Ebene teilt die $(n+1)te$ Ebene in zwei Teilebenen (welche vereinigt die $(n+1)te$ Ebene selbst ergeben). Wir zeigen nun, dass es mindestens eine Schnittgerade e gibt, sodass F_1 und F_2 nicht auf der selben Teilebene liegen (die eine liegt also auf der anderen Teilebene):
Wir betrachten F_1. Entweder ist F_1 eine begrenzte oder unbegrenzte Teilfläche der $(n+1)ten$ Ebene. Wir betrachten nun alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$ Schnittgeraden einzeln nacheinander, die an F_1 angrenzen bzw. F_1 berühren. All diese Schnittgeraden (alle einzeln betrachtet) teilen die $(n+1)te$ Ebene in zwei disjunkte Teilebenen auf. Wenn nun F_1 und auf F_2 für alle m Schnittgeraden auf der selben disjunkten Teilebenen sind, so würde $F_1 = F_2$ folgen (man betrachtet einfach den begrenzten und unbegrenzten Fall separat), was aber ein Widerspruch wäre, womit die Existenz solch einer Schnittgeraden gezeigt wurde.
Sei E die Ebene, die die $(n+1)te$ Ebene in e schneidet. Die Ebene E teilt den Raum in zwei Raumteile, wobei F_1 im anderen Raumteil ist als F_2 (da beide auf unterschiedliche Teilebenen der $(n+1)ten$ Ebene sind, welche durch e erzeugt werden). Somit kann es nicht der Fall sein, dass R an F_1 und F_2 gleichzeitig angrenzt, denn E würde R teilen, was ein Widerspruch wäre.

$\square$

Hilfslemma (3):
Alle von den y_{n+1} disjunkten Flächenteilen zerlegen einen disjunkten Raumteil in zwei neue disjunkte Raumteile.
Beweis:
Wir betrachten nun eine von den y_{n+1} disjunkten Flächenteilen der $(n+1)ten$ Ebene und bezeichnen diese mit F. Auf der einen Seite der $(n+1)ten$ Ebene grenzt ein disjunkter Raumteil an F und auf der andere Seite der Ebene ebenso. Würden wir F verschwinden lassen, so würde aus den beiden disjunkten Raumteilen ein einziger disjunkter Raumteil werden. D.h. durch das hinzufügen bzw. entstehen lassen von F, wird ein disjunkter Raumteil in zwei disjunkte Raumteile zerlegt.

$\square$

Wir haben also insgesamt gezeigt, dass alle neu entstandenen disjunkten Raumteile an der $(n+1)ten$ Ebene angrenzen, dass an allen

y_{n+1} disjunkten Flächenteile genau zwei neu entstandene disjunkte Raumteile angrenzen und dass keine zwei disjunkten Flächenteile an einem selben neu entstandenem disjunkten Raumteil angrenzen. Wir erhalten also insgesamt $2 \cdot y_{n+1}$ neu entstandene disjunkte Raumteile, doch von der Anzahl her erhöht sie sich nur um y_{n+1}, denn wir teilen y_{n+1} disjunkte Raumteile in jeweils zwei neue disjunkte Raumteile, womit die vorherigen y_{n+1} disjunkten Raumteile nicht mehr existieren. Die Anzahl der disjunkten Raumteile wird also pro disjunkten Flächenteil der $(n+1)ten$ Ebene um 1 erhöht. Also gilt tatsächlich $a_{n+1} = a_n + y_{n+1}$.

□

Da das Dodekaeder ein platonischer Körper ist, weist es die bekannten Eigenschaften auf, dass die beiden gegenüberliegenden Flächen des Dodekaeders parallel sind und dass das Dodekaeder inversionssymmetrisch (Punktspiegelung bezüglich des Dodekaedermittelpunkts) ist, d.h. die gegenüberliegenden Pentagone tauschen ihren Platz. Dies können wir durch eine Drehung und Spiegelung erreichen:
Hierzu betrachten wir das Dodekaeder mit den vier eingezeichneten Ebenen und den vier vorderen nummerierten Pentagonen in Bild 1. Wir führen nun eine 180° Drehung um den Dodekaedermittelpunkt durch und erhalten Bild 2. Nun spiegeln wir das Dodekaeder noch, sodass die vorderen Pentagone zu den hinteren werden und umgekehrt. Somit haben wir insgesamt alle gegenüberliegenden Pentagone vertauscht.
Wir betrachten am Anfang einen Dodekaeder mit zwei eingezeichneten Ebenen, die parallel zueinander sind (siehe Bild 3).
Diese beiden Ebenen zerlegen den Raum offensichtlich in drei disjunkte Raumteile. Wir fügen nun eine weitere Ebene hinzu (siehe Bild 4). Diese dritte Ebene wird offensichtlich von den beiden anderen Ebenen in drei disjunkte Flächenteile zerlegt und somit erhalten wir insgesamt nach dem Lemma 3+3=6 disjunkte Raumteile. Als nächstes kommt die parallele Ebene zur roten Ebene dazu (siehe Bild 5). Da wir wissen, dass ein Dodekaeder inversionssymmetrisch ist, hat die zweite rote Ebene exakt die gleiche Flächeneinteilung, wie die zu ihr parallelen Ebene (zumindest im Fall, wenn zur jeder Ebene die parallele Ebene eingezeichnet ist, was hier vorliegt). Denn durch die Inversionssymmetrie (wie wir sie oben beschrieben haben und bewiesen haben) tauschen sich per se nur die Beschrif-

tungen der Pentagone und Ebenen und diese jeweils mit dem zu sich parallelen Pentagon bzw. mit der zu sich parallelen Ebene. Folglich wird die zweite rote Ebene auch in drei disjunkte Flächenteile zerlegt, sodass 6+3=9 disjunkte Raumteile vorliegen.
Wir fügen nun eine fünfte Ebene hinzu (siehe Bild 6). Da die Ebene zu keinen der bereits vorhandenen Ebenen parallel ist, schneidet die violette Ebene alle vier Ebenen. Es entstehen vier Schnittgeraden, wobei jede Gerade eine zu sich parallele Gerade hat, es aber keine drei bzw. vier parallelen Geraden gibt. Es ist nun offensichtlich, dass die violette Ebene in neun disjunkte Flächenteile zerlegt wird (dies ist stets der Fall für vier Schnittgeraden, unabhängig davon wie die Schnittgeraden angeordnet sind, unter der Nebenbedingung, dass jede Gerade eine zu sich parallele Gerade hat, es aber keine drei bzw. vier parallele Geraden gibt). Wir haben nach dem Lemma nun 9+9=18 disjunkte Raumteile vorliegen.
Auch hier fügen wir die zur violetten Ebene parallelen Ebene hinzu. Analog folgt mit der Inversionssymmetrie, dass auch diese Ebene eine exakte Flächeneinteilung wie ihre zu sich parallele Ebene hat. Wir sind nun bei 18+9=27 disjunkten Raumteilen.
Bevor wir eine siebte Ebene hinzufügen, machen wir uns erst folgendes klar:
Wir betrachten irgendein Pentagon P des Dodekaeders und außerdem die fünf an P grenzenden Pentagone des Dodekaeders. Wir lassen nun durch diese fünf angrenzenden Pentagone jeweils eine Ebene verlaufen. Diese fünf Ebenen schneiden sich in einem Punkt, was unmittelbar aus der Symmetrie folgt, wobei mit der Symmetrie die 108° Drehung des Dodekaeder um die Senkrechte durch den Mittelpunkt von P gemeint ist. Der Schnittpunkt der fünf Ebenen liegt auf der Senkrechten zum Mittelpunkt von P. Dies gilt natürlich auch für nur vier dieser Ebenen, da durch das Weglassen einer dieser fünf Ebenen der Schnittpunkt unverändert bleibt.
Nun kommen wir zu siebten Ebene (siehe Bild 7). Die Ebenen durch die anderen Pentagone haben wir weggelassen, damit es übersichtlich bleibt, dafür haben wir die Pentagone dunkel gefärbt und die Kanten vergrößert; auf diesen Flächen liegt also schon eine Ebene. Wir zählen nun die Anzahl der disjunkten Flächenteile, die bei der siebten Ebene entstehen. Da drei Pentagone am Pentagon der grünen Ebene angrenzen, verlaufen die Schnittgeraden dieser drei Ebenen mit der grünen Ebene durch die drei vergrößerten Kanten. Wir erhalten also das Bild 8. Nun bestimmen wir die Schnittgerade der

oberen blauen Ebene E_1 mit der grünen Ebene E_3 (siehe Bild 9).
Wir betrachten das lila gefärbte Pentagon, wobei durch dieses Pentagon **keine** Ebene verläuft und außerdem betrachten wir die vier angrenzenden Pentagone bzw. die Ebenen E_1, E_2, E_3 und E_4, welche durch die vier Pentagone verlaufen (siehe Bild 9). Wir wenden obige Tatsache an, dass die vier Ebenen E_1, E_2, E_3 und E_4 sich in einem Punkt schneiden. Dies ist gleichbedeutend damit, dass sich die drei Ebenen E_1, E_2 und E_4 auf der grünen Ebene E_3 in einem Punkt schneiden. Folglich schneiden sich auch ihre Schnittgeraden auf E_3 in einem Punkt. Des Weiteren wissen wir, dass die Schnittgeraden der Ebene E_1 und der zu ihr parallelen Ebene mit der Ebene E_3 auch parallel sind; wir erhalten also das Bild 10. Und aus Symmetriegründen erhalten wir insgesamt im Bild 11 die Flächeneinteilung der siebten Ebene. Um diese zu zählen, ziehen wir folgende Tatsache heran, jedoch ohne Beweis, da dieser analog zum Beweis des Lemmas ist (oder gar offensichtlich ist):
Gegeben seien n paarweise verschiedene Geraden in der Ebene. Diese teilen die Ebene in a_n disjunkte Flächenteile. Wir fügen eine $(n+1)te$ Gerade hinzu, welche k der n Geraden schneidet und so y_{n+1} Schnittpunkte entstehen. Folglich ist $a_{n+1} = a_n + (y_{n+1} + 1)$. Hierbei wird die $(n+1)te$ Gerade in $(y_{n+1} + 1)$ Strecken geteilt und jede dieser Strecke teilt ein disjunktes Flächenteil.
Lassen wir Bild 11 die rote und blaue Gerade außer Acht, so haben wir neun disjunkte Teilflächen. Durch das Hinzufügen der roten Geraden, erhalten wir nach obigen Satz insgesamt $9 + (2 + 1) = 12$ disjunkte Teilflächen und durch das Hinzufügen der blauen Gerade insgesamt $12 + (4 + 1) = 17$ disjunkte Teilflächen. Die siebte Ebene wird also in 17 disjunkte Teilflächen geteilt und somit erhalten wir 27+17=44 disjunkte Raumteile. Durch das Hinzufügen der parallelen Ebene zur siebten Ebene erhalten wir also 44+17=61 disjunkte Raumteile.
Wir fügen nun eine neunte Ebene hinzu, wobei durch vier angrenzende Pentagone auch eine Ebene durchgeht. Wie beim vorherigen Fall, gehen die Schnittgeraden also durch vier dieser angrenzenden Kanten. Durch das Hinzufügen der parallel Schnittgeraden erhalten wir eine Flächeneinteilung, wie im Bild 12 zu sehen ist. Auch hier fügen wir erst die rote Gerade hinzu, dann die blaue. Wir haben dann $(17 + (4 + 1)) + (3 + 1) = 26$ disjunkte Teilflächen, also sind wir bei 61+26=87 disjunkten Raumteilen. Mit der parallelen Ebene dann bei 87+26=113 disjunkten Raumteilen.

Kommen wir zur elften Ebene. Durch alle angrenzenden Pentagone verläuft eine Ebene. Wir erhalten das Bild 13. Hier erhalten wir $(26+(4+1))+(4+1) = 36$ disjunkte Flächenteile. Also sind wir bei 113+36=149 disjunkten Raumteilen und durch das hinzufügen der parallelen und zugleich letzten Ebene, erhalten wir alles in allem 149+36=185 disjunkte Raumteile.

$\square$