Hilfsmittel

Paint, MO-Training (bei Herrn Broelemann)

Lösung zu Aufgabe 1

Wir zeigen, dass Amelie den Gewinn stets erzwingen kann. Hierbei bezeichnen wir das Entfernen einer Zahl an der Tafel als einen Zug. Da am Ende nur noch zwei Zahlen an der Tafel stehen sollen, heißt das, dass nach jedem Zug von Boris, ein Zug von Amelie folgt (da Amelie anfängt und somit auch aufhören muss).
Im ersten Zug entferne Amelie die Zahl 2017.
Wir unterteilen die restlichen 2016 Zahlen an der Tafel nun in acht Mengen, wobei die Zahlen mit der gleichen Restklasse Modulo 8 in der gleichen Menge sind. Aus $2016 = 32 \cdot 63$ folgt sofort
$R_1 = \{1, 9, 17, ..., 2009\}$, $R_2 = \{2, 10, 18, ..., 2010\}, ...,$
$R_8 = \{8, 16, 24, ..., 2016\}$. Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente der endlichen Menge M gemeint. Wir sehen sofort, dass
$|R_i| = \dfrac{2016}{8} = 4 \cdot 63$ ist, für alle $i = 1,\ 2, ...,\ 8$.
An der Tafel stehen nun die Zahlen von 1 bis 2016. Wir bezeichnen S als Summe dieser Zahlen, also $S = 1 + 2 + 3 + ... + 2016$
$= \dfrac{2016 \cdot 2017}{2} = 16 \cdot 63 \cdot 2017$ (Gaußsche Summenformel). Also ist S durch 8 teilbar.
Boris muss nun einen Zug vollziehen. Sei $a \in R_j$ die von Boris entfernte Zahl mit irgendeinem $j = 1,\ 2, ...,\ 8$ (das a entfernen wir dann auch aus R_j). Nun wählt Amelie eine Zahl b aus der Menge R_{8-j}, wobei $R_0 = R_8$ gelten soll (auch hier wird b aus R_{8-j} entfernt). Dies ist stets möglich, da alle Mengen gleichmächtig sind (was für die Fälle $j = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7$ relevant ist) und deren Mächtigkeit gerade ist (was für die Fälle $j = 4,\ 8$ relevant ist).
Wir haben nun die neue Summe $S - a - b \equiv 0 - j - (8 - j)$
$\equiv 0\ (mod\ 8)$ an der Tafel stehen. Die neue Summe ist also durch 8 teilbar. Mit dieser Strategie ist die Summe der verbleibenden Zahlen nach jedem Zug von Amelie durch 8 teilbar. Dies wird solange wiederholt, bis nur noch zwei Zahlen an der Tafel stehen, wobei deren Summe auch durch 8 teilbar ist (da Amelie den letzten Zug macht). Folglich hat Amelie gewonnen. □

Lösung zu Aufgabe 2

Wir betrachten ein überschneidungsfreies ebenes $n-$Eck. Nach Euklid hat es eine Innenwinkelsumme von $(n-2)\cdot 180°$. Nun sei m die Anzahl der spitzen Winkel im $n-$Eck, d.h. diese m Winkel sind echt kleiner als $90°$ und die restlichen $(n-m)$ Winkel sind echt kleiner als $360°$. Demnach gilt die folgende Ungleichung (da auf der linken Seite die Summe aller Winkel ist und wir sie nach oben abgeschätzt haben):
$(n-2)\cdot 180° < m\cdot 90° + (n-m)\cdot 360°$
$\Leftrightarrow (n-2)\cdot 2 < m + (n-m)\cdot 4$
$\Leftrightarrow 2n-4 < 4n-3m$
$\Leftrightarrow m < \dfrac{2n+4}{3}$
Also gilt, dass die Anzahl der spitzen Winkel im $n-$Eck echt kleiner als $\dfrac{2n+4}{3}$ ist. Für $n = 2017$ erhalten wir $m < 1346$. Wir geben nun eine Konstruktion eines $2017-$Ecks an, welche 1345 spitze Winkel beinhaltet, was zugleich das Maximum wäre, wie wir an der letzten Ungleichung sehen. Doch bevor wir so ein $2017-$Eck konstruieren, beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma:
Wir beziehen uns hier auf die Abbildung 1 auf Seite 9. Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und zwei weiteren Punkten S und T auf k. Von M aus verläuft jeweils ein Strahl durch S und T. Außerdem sei $\measuredangle TMS = \alpha < 180°$. Dann existieren zwei weitere Punkte D und E, welche in der schraffierten Fläche liegen, aber nicht im Kreissektor TMS, also einfach oberhalb des Kreisbogens $\overset{\frown}{ST}$ und in der einschließenden Fläche der Strahlen $[MS$ und $[MT$, für die gilt $\measuredangle SDE < 90°$ und $\measuredangle DET < 90°$.

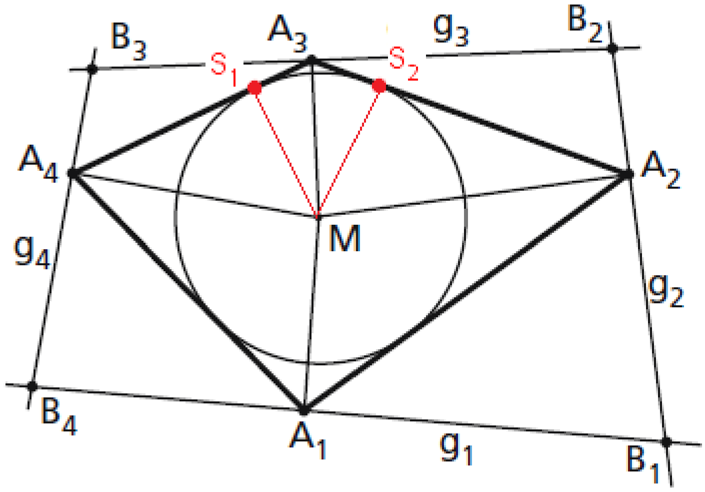
Beweis:
Wir fügen zwei weitere Punkte B und C hinzu, welche auf $[MS$ respektive $[MT$ liegen, $|\overline{MB}| = |\overline{MC}|$ gilt und sodass $\overline{BC}$ den Kreis k nicht schneidet (dies ist immer möglich, da $\alpha < 180°$ und wir dementsprechend B und C immer weiter von M entfernen können, sodass der Abstand von $\overline{BC}$ und M immer größer wird). Nun gilt $\measuredangle BCM = \measuredangle MBC$, da das Dreieck BMC gleichschenklig ist mit Basis $\overline{BC}$. Also $180° = \alpha + \measuredangle BCM + \measuredangle MBC = \alpha + 2\cdot\measuredangle BCM$
$\Leftrightarrow \measuredangle BCM = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$.

Wir wählen nun unsere beiden Punkte D und E so, dass sie auf $\overline{BC}$ liegen. Dann gilt
$\measuredangle SDE = \measuredangle MBC + \measuredangle DSB = 90° - \frac{\alpha}{2} + \measuredangle DSB$. Wir lassen jetzt D solange gegen B laufen (nähern es also beliebig an B an) bis $\measuredangle DSB < \frac{\alpha}{2}$ gilt. Dann haben wir auch $\measuredangle SDE < 90°$. Analog für den Punkt E. □

Wir betrachten nun die Abbildung 2 auf Seite 9. Wir können leicht sehen, dass das 10−Eck genau sieben spitze Winkel beinhaltet.
Wir zerteilen den Kreisbogen $\widehat{HA}$ nun mit einem Strahl, wie in Abbildung 3 auf Seite 9 zusehen ist; der Schnittpunkt sei K. Nach unserem Lemma existieren dann Punkte I, J, L und M, sodass die Winkel bei den vier Punkten echt kleiner 90° sind. Wir haben also nun ein 13−Eck mit genau neun spitzen Winkeln. D.h. wenden wir unser obiges Verfahren erneut an (immer bei dem untersten Kreisbogen), erhalten wir ein neues Vieleck mit drei Eckpunkten mehr als zum vorherigen Vieleck, wobei zwei von den neuen Ecken einen spitzen Winkel haben. Also können wir ein $(10+3k)$−Eck mit $(7+2k)$ spitzen Winkel konstruieren. Für $k = 669$ erhalten wir das 2017−Eck mit 1345 spitzen Winkeln. □

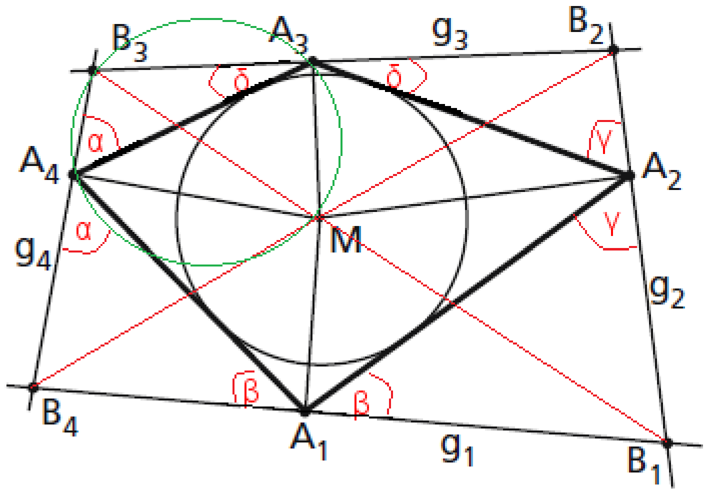
Lösung zu Aufgabe 3

Im Folgenden beziehen wir uns auf die Abbildung, welche in der Aufgabenstellung gegeben ist:

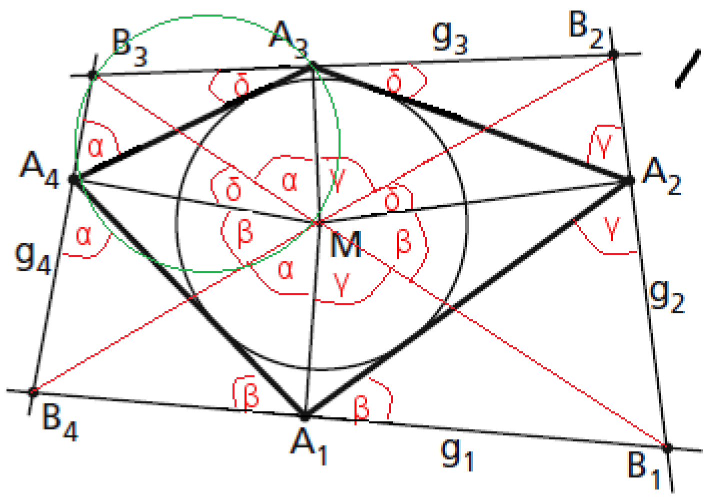


Wir bezeichnen den Schnittpunkt des Inkreises mit der Tangente $\overline{A_3A_4}$ als S_1 und mit der Tangente $\overline{A_2A_3}$ als S_2. Es gilt $\measuredangle MS_1A_3 = 90° = \measuredangle A_3S_2M$ und ferner $|\overline{MS_1}| = |\overline{MS_2}|$ (1). Mit dem Satz des Pythagoras folgt $|\overline{MS_1}|^2 + |\overline{S_1A_3}|^2 = |\overline{MA_3}|^2$ $= |\overline{MS_2}|^2 + |\overline{S_2A_3}|^2$ und mit (1) erhalten wir $|\overline{S_1A_3}| = |\overline{S_2A_3}|$. Demnach sind die Dreiecke $\triangle A_3S_1M$ und $\triangle A_3MS_2$ nach dem ersten Kongruenzsatz (SSS-Satz, 9. Klasse) kongruent (also deckungsgleich). Hiermit folgt, dass $\measuredangle S_1A_3M = \measuredangle MA_3S_2$ (2). Außerdem gilt $\measuredangle B_3A_3A_4 + \measuredangle S_1A_3M = 90° = \measuredangle MA_3S_2 + \measuredangle A_2A_3B_2$. Mit (2) erhalten wir demnach $\measuredangle B_3A_3A_4 = \measuredangle A_2A_3B_2$.
Analog gelten die Winkelbeziehungen an den Punkten A_4, A_1, A_2 (siehe hierzu die erste Abbildung auf der nächsten Seite).
Wir benutzen nun folgende zwei Sätze, die aus dem Mathe-Olympiade-Training (bei Herrn Broelemann) bekannt sind:
Satz 1: Ist in einem Viereck die Summe gegenüberliegender Winkel 180 Grad, so ist es ein Sehnenviereck, d.h. das Viereck liegt auf einem Kreis.
Satz 2: (Peripheriewinkelsatz)
Alle Peripheriwinkel (in der gleichen Halbebene) über dem gleichen Kreisbogen sind gleichgroß.

Wir beziehen uns von nun an auf folgende Abbildung:



Wobei wir hier die Strecken $\overline{B_iM}$ für $i = 1, 2, 3, 4$ eingezeichnet haben.
Wir betrachten das Viereck $MA_3B_3A_4$. Es gilt $\measuredangle MA_4B_3 + \measuredangle B_3A_3M = 90° + 90° = 180°$. Nach *Satz 1* ist $MA_3B_3A_4$ ein Sehnenviereck. Analog für die anderen drei Vierecke $MA_4B_4A_1$, $MA_1B_1A_2$ und $MA_2B_2A_3$. Wenden wir nun *Satz 2* auf alle vier Sehnenvierecke an, so erhalten wir die folgende Abbildung:



Hier wurde beispielsweise die Sehne $\overline{A_3B_3}$ des Sehnenvierecks $MA_3B_3A_4$

betrachtet; dies führte zu $\measuredangle A_3A_4B_3 = \measuredangle A_3MB_3$ etc. Wir haben nun beim Punkt M den Vollwinkel $2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360°$ $\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$. Somit sehen wir, dass $\measuredangle B_1MB_3 = 180°$ $= \measuredangle B_2MB_4$. Also bilden $\overline{B_1M}$ und $\overline{MB_3}$ die Diagonale $\overline{B_1B_3}$, welche durch M verläuft. Analog für die andere Diagonale. Also schneiden sich die Diagonalen im Punkt M. $\square$

Lösung zu Aufgabe 4

Vorerst führen wir den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ein, für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$, wobei $m! := m\cdot(m-1)\cdots 1$ für $m \in \mathbb{N}$ und $0! := 1$. Aus der Schule ist bekannt, dass der Binomialkoeffizient die Anzahl der Möglichkeiten angibt, k Objekte aus gegebenen n verschiedenen Objekten auszuwählen (ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge der k gewählten Objekte), mithin ist der Binomialkoeffizient also stets eine positive ganze Zahl.

a)

Die Folgenglieder von $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sind durch die Rekursion offensichtlich eindeutig bestimmt (da das Folgenglied a_n durch den Wert seines Vorgängers a_{n-1} festgelegt ist. Iterativ ist a_n also durch $a_0 = 1$ eindeutig bestimmt). Wir behaupten $a_n = \binom{2n}{n}$ sei die explizite Vorschrift für die Folgenglieder. Um die Richtigkeit zu beweisen, müssen wir nur überprüfen, ob die obige Vorschrift die Rekursionsgleichung und die Bedingung $a_0 = 1$ erfüllt.

Es ist $a_0 = \binom{0}{0} = \dfrac{0!}{0! \cdot 0!} = 1$. Ferner gilt:

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n-2)! \cdot (2n) \cdot (2n-1)}{(n-1)! \cdot (n-1)! \cdot n \cdot n}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)! \cdot (n-1)!} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-1)}{n \cdot n} = a_{n-1} \cdot (4 - \frac{2}{n}) \text{ für } n \geq 1.$$

Somit stimmt die explizite Rekursionsformel und alle Folgenglieder sind positive ganze Zahlen. □

b)

Sei p eine beliebige Primzahl mit $n < p \leq 2n$. Ferner haben wir $a_n = \dfrac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ (1). Aus der Tatsache, dass p eine Primzahl ist und $p > n$ gilt, folgt, dass p nicht als Faktor im Produkt $n!$ vorkommt. Aus $2n \geq p$ folgt, dass p mindestens einmal als Faktor im Produkt $(2n)!$ auftritt. Somit kommt p im Nenner vom Ausdruck auf der rechten Seite von (1) kein Mal vor, doch im Zähler mindestens einmal, folglich ist die rechte Seite von (1) durch p teilbar und dementsprechend auch die linke Seite von (1), was gerade a_n ist. Da p beliebig gewählt wurde, gilt dies für alle Primzahlen q mit $n < q \leq 2n$. □

c)

Sei $n = p \in prim$. Wir zeigen, dass $p \,|\, (a_p - 2) \cdot (p-1)!$ gilt. Denn wenn dies gilt, so folgt sofort $p \,|\, (a_p - 2)$, da p und $(p-1)!$ teilerfremd sind. Es gilt:

$(a_p - 2) \cdot (p-1)! = (\frac{(2p)!}{p! \cdot p!} - 2) \cdot (p-1)!$

$= (\frac{(2p) \cdot (2p-1) \cdots (p+1)}{p!} - 2) \cdot (p-1)!$

$= \frac{(2p) \cdot (2p-1) \cdots (p+1)}{p} - 2 \cdot (p-1)!$

$= 2 \cdot (2p-1) \cdots (p+1) - 2 \cdot (p-1)!$

$= 2 \cdot [(2p-1) \cdot (2p-2) \cdots (p+1) - (p-1)!]$

$\equiv 2 \cdot [(2p-1-p) \cdot (2p-2-p) \cdots (p+1-p) - (p-1)!]$

$= 2 \cdot [(p-1) \cdot (p-2) \cdots 1 - (p-1)!] = 2 \cdot [(p-1)! - (p-1)!]$

$= 2 \cdot 0 = 0 \quad (mod\ p)$ $\square$