## Hilfsmittel

Wikipedia (Inkreis & Seitenhalbierende)

# Lösung zu Aufgabe 1

Bevor wir zum eigentlichen Problem kommen, beweisen wir erst folgendes Lemma:
***Lemma:***
Es gilt die Formel

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies beweisen wir mittels vollständiger Induktion über $n$.
*Beweis:*
**Induktionsanfang:** Sei $n = 1$. Es gilt $1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.
**Induktionsannahme:** Es sei die Behauptung für $n$ bereits bewiesen, es gelte also $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.
**Induktionsschritt:** Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für $(n+1)$. Zu zeigen ist also, dass $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6}$ gilt. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{(IA)}}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1) \cdot (n \cdot (2n+1) + 6 \cdot (n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1) \cdot (2n^2 + 7n + 6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6} \qquad \square$$

Kommen wir nun zum eigentlichen Problem. Wir zeigen, dass das Geforderte erfüllt ist genau dann, wenn $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ gilt, d.h. wenn $n$ also die Form $4k$ oder $4k + 3$ mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$ hat. Hierzu beweisen wir erst die Hinrichtung:
Sei also $a_j \in \{1, 2, 3, ..., n+1\}$ mit $1 \leq j \leq n$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Ferner seien die $n$ Zahlen $|a_1 - a_2|, ..., |a_n - a_1|$ paarweise

verschieden. O.B.d.A. sei $a_j > a_i$, dann gilt $max\{|a_j - a_i|\}$ $= max\{a_j - a_i\} = max\{a_j\} - min\{a_i\} = (n+1) - 1 = n$ und außerdem $min\{|a_j - a_i|\} \geq 1$ (da Null nach Voraussetzung nicht möglich ist). Mit $a_j = 2$ und $a_i = 1$ erhalten wir als Differenz 1, folglich gilt $min\{|a_j - a_i|\} = 1$. Die $n$ Zahlen $|a_1 - a_2|, ..., |a_n - a_1|$ liegen also zwischen 1 und $n$. Da sie außerdem paarweise verschieden sind, nehmen sie exakt alle Werte von 1 bis $n$ an. Es gilt also:
$|a_1 - a_2|^2 + |a_2 - a_3|^2 + ... + |a_n - a_1|^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$
$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + ... + (a_n - a_1)^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$
$\Leftrightarrow 2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) - 2 \cdot (a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + ... + a_n \cdot a_1)$
$= \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$
Teilt man nun beide Seiten der Gleichung durch 2, erhält man links eine ganze Zahl und rechts $\dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{12}$, was heißt, dass $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ durch 12 teilbar sein muss, insbesondere durch 4. Man sieht sofort, dass der Ausdruck $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ nur für $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ durch 4 teilbar ist, denn für die beiden anderen Restklassen erhalten wir nicht die Restklasse 0 Modulo 4.
Nun zur Rückrichtung:
Hierzu geben wir für beide Fälle eine Konstellation der Zahlen an:
***1.Fall:*** $n = 4k$
Wir ordnen den Folgengliedern der Folge $(a_1, a_2, ..., a_{4k})$ nun die Werte zu, sodass die Bedingung in der Aufgabenstellung erfüllt ist.
Wir setzen $a_{2m-1} = m$ und $a_{2m} = 4k + 2 - m$ für $1 \leq m \leq k$.
Wir erhalten das Bild:
$(1,\ 4k+1,\ 2,\ 4k,\ 3, ...,\ k-1,\ 3k+3,\ k,\ 3k+2, ...)$
Nun setzen wir $a_{2m-1} = m + 1$ und $a_{2m} = 4k + 2 - m$ für $k + 1 \leq m \leq 2k$.
Als endgültiges Resultat erhalten wir diese Folge:

$$(1,\ 4k+1,\ 2,\ 4k,\ 3, ...,\ k-1,\ 3k+3,\ k,\ 3k+2,\ k+2,\ 3k+1, ...,\ 2k+1,\ 2k+2)$$

Wir gehen nacheinander die Differenzen von links nach rechts durch (die obigen Vorschriften der Folgenglieder sind zum besseren Verständnis genannt worden):
$(4k+1) - 1 = 4k$
$(4k+1) - 2 = 4k - 1$
$(4k) - 2 = 4k - 2$
$(4k) - 3 = 4k - 3$
...
$(3k+3) - (k-1) = 2k + 4$

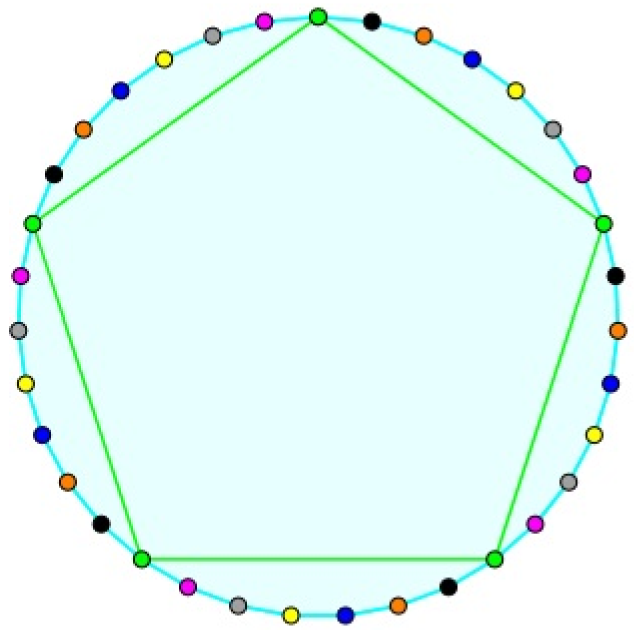
$(3k+3)-k=2k+3$
$(3k+2)-k=2k+2$
$(3k+2)-(k+2)=2k$
$(3k+1)-(k+2)=2k-1$
...
$(2k+2)-(2k+1)=1$
$(2k+2)-1=2k+1$
Damit sehen wir, dass alle $4k$ Differenzen die Werte von 1 bis $4k$ annehmen und somit paarweise verschieden sind.
***2.Fall:*** $n=4k+3$
In diesem Fall geben wir die explizite Folge sofort an, da sie sich im Wesentlichen von der Folge im vorherigen Fall nicht unterscheidet:

$$(1,\ 4k+4,\ 2,\ 4k+3,\ 3, ...,\ 3k+5,\ k+1,\ 3k+4,\ k+3,\ 3k+3, ...,\ 2k+4,\ 2k+3)$$

Wie oben erhalten wir folgende Differenzen:
$(4k+4)-1=4k+3$
$(4k+4)-2=4k+2$
$(4k+3)-2=4k+1$
$(4k+3)-3=4k$
...
$(3k+5)-(k+1)=2k+4$
$(3k+4)-(k+1)=2k+3$
$(3k+4)-(k+3)=2k+1$
$(3k+3)-(k+3)=2k$
...
$(2k+4)-(2k+3)=1$
$(2k+3)-1=2k+2$
Damit sehen wir, dass alle $4k+3$ Differenzen die Werte von 1 bis $4k+3$ annehmen und somit ebenso paarweise verschieden sind. $\square$

# Lösung zu Aufgabe 2

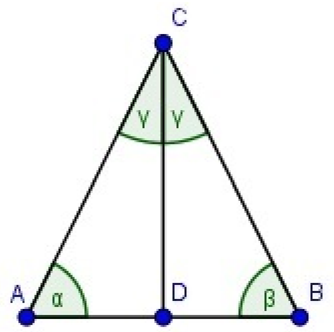
Die Antwort lautet ja. Um dies zu beweisen beziehen wir uns auf folgende Abbildung:

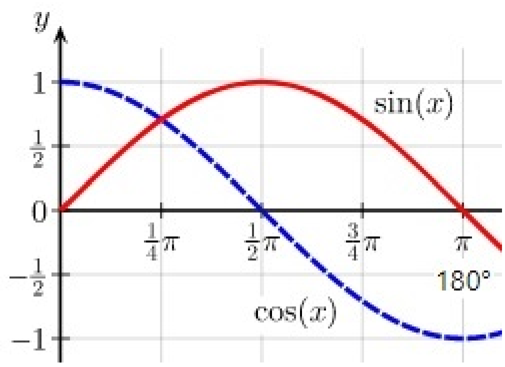


Wir betrachten ein reguläres 35-Eck und färben nun wie in der Abbildung zu sehen fünf der Eckpunkte grün, sodass diese ein Pentagon bilden. Dies ist möglich, da zwischen zwei benachbarten grünen Punkten eine Anzahl von sechs anderen Punkten ist und aus Symmetriegründen somit die fünf Seiten des Fünfecks gleich lang sind. Wählen wir nun drei beliebige Eckpunkte des Pentagons, so erhalten wir stets ein gleichschenkliges Dreieck, was man leicht überprüfen kann. Nun färben wir diejenigen Punkte des 35-Ecks Pink, welche gegen den Uhrzeigersinn neben den grünen Punkten sind. Auch diese fünf Punkte bilden ein Pentagon. Dies wiederholen wir, bis wir alle 35 Eckpunkte in insgesamt sieben Farben gefärbt haben und die gleich gefärbten Punkte jeweils ein Pentagon bilden. Nun müssen wir nach Aufgabenstellung 15 Punkte des 35-Ecks Rot färben, was nach dem Schubfachprinzip heißt, dass wir bei mindestens einem Pentagon mindestens drei Eckpunkte Rot färben müssen, somit bilden diese drei roten Punkte im selben Pentagon ein gleichschenkliges Dreieck. $\square$

# Lösung zu Aufgabe 3

Wie in der Aufgabenstellung gegeben sei $3c = a + b$, $I$ der Inkreismittelpunkt und $S$ der Schwerpunkt.
Als erstes beweisen wir, dass $S \neq I$ gilt. Hierzu nehmen wir das Gegenteil an und haben somit $S = I$. Dies führen wir nun zu einem Widerspruch zu der Bedingung $3c = a + b$:
Aus der Schule ist bekannt, dass $I$ der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden ist und $S$ der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden ist und deren Existenz beim Dreieck stets sichergestellt sind. Mit $S = I$ folgt also, dass die Winkelhalbierenden mit den jeweiligen Seitenhalbierenden identisch sind. Wir betrachten folgendes Bild, wo *eine* Winkelhalbierende zugleich eine Seitenhalbierende ist:



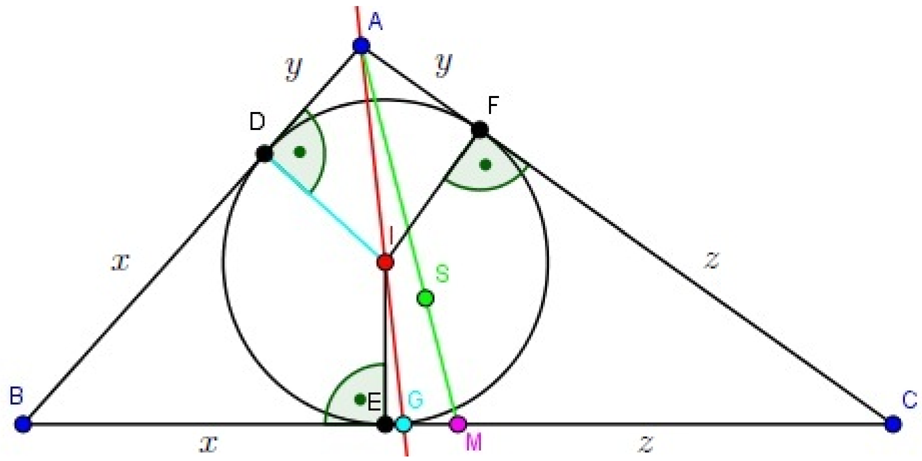

Es gilt hier $|\overline{AD}| = |\overline{DB}|$ und $\measuredangle ACD = \gamma = \measuredangle DCB$. Mit dem Sinussatz folgt $\dfrac{sin\ \alpha}{|\overline{CD}|} = \dfrac{sin\ \gamma}{|\overline{AD}|} = \dfrac{sin\ \gamma}{|\overline{DB}|} = \dfrac{sin\ \beta}{|\overline{CD}|} \Leftrightarrow sin\ \alpha = sin\ \beta$.
Da $0° < \alpha, \beta < 180°$ gilt, folgt aus der letzten Gleichung $\alpha = \beta$ oder $\alpha = 180° - \beta$ (wie man an der Sinuskurve ablesen kann mit der Identität $sin(\omega) = sin(180° - \omega)$), doch wegen
$180° = \alpha + \beta + 2\gamma > \alpha + \beta$ kann letzteres nicht gelten, demnach haben wir $\alpha = \beta$. Bei unserer ursprünglichen Aufgabe liegen *alle* Winkelhalbierende auf den jeweiligen Seitenhalbierenden, d.h. nach obiger Erkenntnis, dass es sich bei unserem Dreieck um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss. Wir haben also $a = b = \dfrac{(a+b)}{3}$ und somit $a = \dfrac{(a+b)}{3} = \dfrac{(a+a)}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot a$, was aber nicht sein kann, da $a > 0$. Dies ist der gewünschte Widerspruch. $\square$

Nun kommen wir zum zweiten Teil der Aufgabe. Zum lösen dieser Aufgabe ziehen wir folgende Tatsachen heran, die aus Wikipedia und MO-Trainingseinheiten bekannt sind:

*Winkelhalbierendensatz:*
Der Satz besagt, dass die Winkelhalbierende in einem Dreieck die dem Winkel gegenüberliegenden Seite im Verhältnis der beiden am Winkel anliegenden Seiten teilt. Sei also das Dreieck $\triangle ABC$ gegeben und die Winkelhalbierende ausgehend vom Punkt $A$ schneide $\overline{BC}$ im Punkt $D$, so gilt: $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{BD}|}$ (was sofort aus dem Sinussatz und $sin(\omega) = sin(180° - \omega)$ folgt).

Seien $a$, $b$ und $c$ die drei Seiten eines Dreiecks. So ist der Radius des Inkreises gegeben durch $r = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Außerdem berechnet man die Länge der zum Punkt $A$ gehörigen Seitenhalbierenden mit $s_a = \frac{\sqrt{2\cdot(b^2+c^2)-a^2}}{2}$.
Wir betrachten folgende Abbildung, die das Dreieck $\triangle ABC$ aus der Aufgabenstellung darstellen soll:



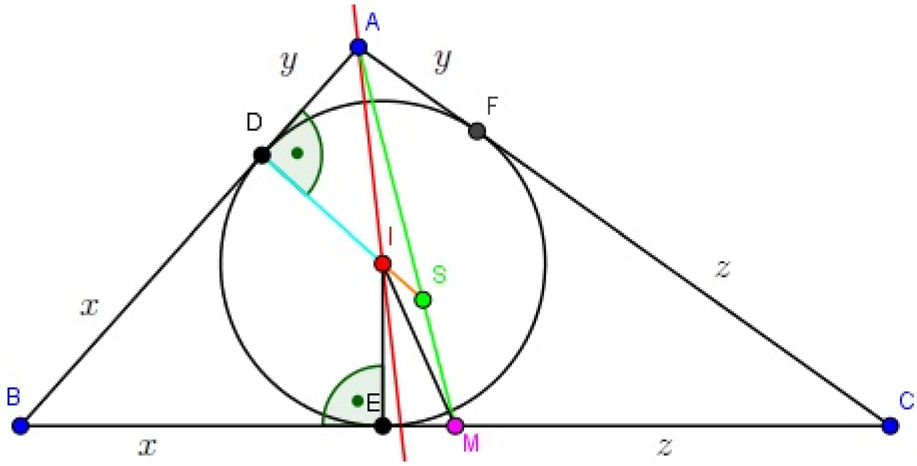

Wie zu sehen, seien $A$, $B$ und $C$ die Eckpunkte des Dreiecks, wobei $|\overline{BC}| = a$, $|\overline{AC}| = b$ und $|\overline{AB}| = c = \frac{a+b}{3}$. Ferner sei $M$ der Mittel-

punkt der Strecke $\overline{BC}$, $I$ der Inkreismittelpunkt und $S$ der Schwerpunkt. In unserer Abbildung kann man außerdem den Inkreis sehen und die Berührungspunkte $D$, $E$ und $F$ der Dreiecksseiten mit dem Inkreis. Die Strecken der Berührungspunkte $D$, $E$ und $F$ zu $I$ liegen natürlich senkrecht zu den jeweiligen Dreiecksseiten (da die Dreiecksseiten tangential zum Kreis verlaufen). Demzufolge gilt nach dem Satz des Pythagoras $|\overline{AD}|^2 + |\overline{ID}|^2 = |\overline{IA}|^2 = |\overline{AF}|^2 + |\overline{IF}|^2$ und da $|\overline{DI}| = |\overline{IF}|$ gilt (weil beide den Radius des Inkreises darstellen) folgt $|\overline{AD}| = |\overline{AF}| := y$. Analog folgt $|\overline{BD}| = |\overline{BE}| := x$ und $|\overline{CF}| = |\overline{CE}| := z$. Unsere Nebenbedingung lässt sich also schreiben als $x + y = c = \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{(x+z)+(y+z)}{3} \Leftrightarrow x + y = z$.
Damit ist $c = x + y$, $b = x + 2y$ und $a = 2x + y$.
Wir zeigen nun, dass $I$ im Dreieck $\triangle ABM$ liegt und nicht auf oder im Dreieck $\triangle AMC$, denn sobald wir dies gezeigt haben, so folgt, dass unsere Skizze den einzig möglichen Fall bzgl. der Lage von $I$ und der Seitenhalbierenden $\overline{AM}$ beschreibt.
Wir bezeichnen hierzu den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bei $A$ mit der Strecke $\overline{BC}$ mit $G$ (siehe Abbildung). Um zu zeigen, dass $I$ im Dreieck $\triangle ABM$ liegt, reicht es zu zeigen, dass $G$ echt auf $\overline{BM}$ liegt bzw. dass $|\overline{GC}| > |\overline{MC}| = \dfrac{|\overline{BC}|}{2}$ gilt:
Mit dem Winkelhalbierendensatz folgt: $\dfrac{|\overline{BG}|}{|\overline{GC}|} = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \dfrac{x+y}{y+z}$
$= \dfrac{x+y}{y+(x+y)} < 1 \Rightarrow |\overline{BG}| < |\overline{GC}|$.

Des Weiteren gilt $|\overline{BC}| = |\overline{BG}| + |\overline{GC}| < 2 \cdot |\overline{GC}| \Leftrightarrow \dfrac{|\overline{BC}|}{2} < |\overline{GC}|$.

$\square$

Von nun an betrachten wir diese Abbildung:




Unser Ziel ist es hier nun zu zeigen, dass $\measuredangle SIA + \measuredangle AID = 180°$ gilt, denn somit wären dann die Punkte $D$, $I$ und $S$ kollinear und somit die Gerade $g$ durch $I$ und $D$ identisch mit der Geraden durch $S$ und $I$. Außerdem haben wir schon nach Definition die Orthogonalität von der Geraden $g$ mit der Dreiecksseite $\overline{AB}$, damit wäre alles gezeigt.
Jetzt beginnt das Rechnen:
Sei $r$ der Radius des Inkreises, dann gilt nach unserem oben genannten Satz:
$s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{(x+z)+(y+z)+(x+y)}{2} = x+y+z = 2x+2y$
und damit haben wir

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{y\cdot x\cdot(x+y)}{2\cdot(x+y)}} = \sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}.$$

Die Länge der Seitenhalbierenden $\overline{AM}$ berechnen wir nun auch:
$|\overline{AM}| = s_a = \dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2(x+2y)^2+2(x+y)^2-(2x+y)^2}}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{2x^2+8xy+8y^2+2x^2+4xy+2y^2-4x^2-4xy-y^2}}{2}$
$= \dfrac{\sqrt{9y^2+8xy}}{2}.$
Im Dreieck $\triangle ADI$ gilt $|\overline{AI}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{DI}|^2 = y^2 + r^2 = y^2 + \dfrac{xy}{2}.$

Im Dreieck $\triangle IEM$ gilt $|\overline{IM}|^2 = |\overline{IE}|^2 + |\overline{EM}|^2$
$= r^2 + (|\overline{BM}| - |\overline{BE}|)^2 = \frac{xy}{2} + ((\frac{x+z}{2}) - x)^2 = \frac{xy}{2} + (\frac{y}{2})^2 = \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}.$

Bei der zweiten Gleichung wurde ausgenutzt, dass $|\overline{EM}| = |\overline{BM}| - |\overline{BE}|$, da $E$ auf $\overline{BM}$ liegt, weil $E$ der Lotfußpunkt vom Punkt $I$ auf der Strecke $\overline{BC}$ bzw. $\overline{BM}$ ist und wir schon gezeigt haben, dass $I$ im Dreieck $\triangle ABM$ liegt; bei der dritten Gleichung wurde ausgenutzt, dass $M$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist und bei der vierten, dass $x + y = z$ gilt.
Ferner wissen wir aus der Schule, dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt, es gilt also $|\overline{AS}| = \frac{2}{3} \cdot |\overline{AM}|$.
Wir wenden nun den Cosinussatz bei dem Dreieck $\triangle AIS$ an und dann beim Dreieck $\triangle AIM$:
$|\overline{SI}|^2 = |\overline{AI}|^2 + |\overline{AS}|^2 - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot |\overline{AS}| \cdot cos(\measuredangle IAS)$

$$\Leftrightarrow |\overline{SI}|^2 = |\overline{AI}|^2 + \frac{4}{9} \cdot |\overline{AM}|^2 - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot \frac{2}{3} \cdot |\overline{AM}| \cdot cos(\measuredangle IAS) \qquad (1)$$

$|\overline{IM}|^2 = |\overline{AI}|^2 + |\overline{AM}|^2 - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot |\overline{AM}| \cdot cos(\measuredangle IAM)$

$$\Leftrightarrow |\overline{IM}|^2 = |\overline{AI}|^2 + |\overline{AM}|^2 - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot |\overline{AM}| \cdot cos(\measuredangle IAS) \qquad (2)$$

Multiplizieren wir nun (2) mit $\frac{2}{3}$ und subtrahieren das dann von der Gleichung (1) erhalten wir:

$$|\overline{SI}|^2 - \frac{2}{3} \cdot |\overline{IM}|^2 = |\overline{AI}|^2 + \frac{4}{9} \cdot |\overline{AM}|^2 - \frac{2}{3} \cdot |\overline{AI}|^2 - \frac{2}{3} \cdot |\overline{AM}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\overline{SI}|^2 = \frac{2}{3} \cdot |\overline{IM}|^2 + \frac{1}{3} \cdot |\overline{AI}|^2 - \frac{2}{9} \cdot |\overline{AM}|^2$$

Setzten wir nun die drei Werte ein, die wir schon oben berechnet haben, so erhalten wir:

$$\Leftrightarrow |\overline{SI}|^2 = \frac{2}{3} \cdot (\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}) + \frac{1}{3} \cdot (y^2 + \frac{xy}{2}) - \frac{2}{9} \cdot \frac{(9y^2 + 8xy)}{4}$$

$$= \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{6} + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{6} - \frac{y^2}{2} - \frac{4xy}{9} = \frac{xy}{18}$$

Nun wenden wir den Cosinussatz erneut im Dreieck $\triangle AIS$ an:
$|\overline{AS}|^2 = |\overline{AI}|^2 + |\overline{SI}|^2 - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot |\overline{SI}| \cdot cos(\measuredangle SIA)$
Nach erneutem Einsetzen der Werte erhalten wir:

$$(\frac{2}{3}|\overline{AM}|)^2 = y^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xy}{18} - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot \sqrt{\frac{xy}{18}} \cdot cos(\measuredangle SIA)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{8xy}{9} = y^2 + \frac{5xy}{9} - 2 \cdot |\overline{AI}| \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{xy}{2}} \cdot cos(\measuredangle SIA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{3} = -\frac{2}{3} \cdot |\overline{AI}| \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} \cdot cos(\measuredangle SIA)$$

$\Leftrightarrow cos(\measuredangle SIA) = -\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2} \cdot |\overline{AI}|}$
Des Weiteren gilt im Dreieck $\triangle ADI$ die Gleichung
$cos(\measuredangle AID) = \dfrac{|\overline{ID}|}{|\overline{AI}|} = \dfrac{r}{|\overline{AI}|} = \dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2} \cdot |\overline{AI}|}$. Damit haben wir

$cos(\measuredangle SIA) + cos(\measuredangle AID) = 0$. Und da beide Winkel zwischen $0°$ und $180°$ liegen, kann man leicht mit der Identität
$cos(\omega) + cos(180° - \omega) = 0$ an der Cosinuskurve ablesen, dass obige Gleichung nur der Fall ist, wenn die Summe beider Winkel gleich $180°$ ist. $\square$

# Lösung zu Aufgabe 4

Wir zeigen, dass es unendlich viele $n$ gibt, sodass der Vorgänger und der Nachfolger der Zahl $(\frac{(n-1)\cdot n}{2})^2 + n^3$ *heinersch* ist.

Der Nachfolger der obigen Zahl ist $(\frac{(n-1)\cdot n}{2})^2 + n^3 + 1$
$= \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} + \frac{4n^3}{4} + 1 = \frac{n^2\cdot(n^2-2n+1)+4n^3}{4} + 1$
$= \frac{n^2\cdot(n^2+2n+1)}{4} + 1 = (\frac{n\cdot(n+1)}{2})^2 + 1^3$, also ebenfalls *heinersch*. Bleibt nur noch zu zeigen, dass unendlich viele $n$ existieren, sodass $(\frac{(n-1)\cdot n}{2})^2 + n^3 - 1 = (\frac{n\cdot(n+1)}{2})^2 - 1$ *heinersch* ist.

Seien $x, y \in \mathbb{Z}^+$ mit $(\frac{n\cdot(n+1)}{2})^2 - 1 = x^2 + (2y-1)^3$. Wir müssen also zeigen, dass es unendlich viele Tripel $(n, x, y)$ gibt, die diese Gleichung erfüllen. Die Gleichung ist äquivalent zu
$(\frac{n\cdot(n+1)}{2})^2 - x^2 = 1 + (2y-1)^3 = 8y^3 - 12y^2 + 6y$
$\Leftrightarrow (\frac{n\cdot(n+1)}{2} - x)\cdot(\frac{n\cdot(n+1)}{2} + x) = y\cdot(8y^2 - 12y + 6)$ (1)
Wir setzen nun $\frac{n\cdot(n+1)}{2} - x = y$ (2) und $\frac{n\cdot(n+1)}{2} + x$
$= 8y^2 - 12y + 6$ (3). Existieren für (2) und (3) Tripel $(n, x, y)$, so erfüllen diese auch (1), da diese Gleichung das Produkt aus (2) und (3) ist. Wir müssen also zeigen, dass es unendlich viele Tripel $(n, x, y)$ gibt, die (2) und (3) erfüllen. Aus (2) folgt
$x = \frac{n\cdot(n+1)}{2} - y$ und somit wird (3) zu $n\cdot(n+1) = 8y^2 - 11y + 6$ (4). Wir müssen noch berücksichtigen, dass $x \neq 0$ gilt, was aber aus (4) folgt, denn es gilt $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{8y^2 - 11y + 6}{2} > y$, was für $y = 1$ sicher gilt und für $y \geq 2$ haben wir

$\frac{8y^2 - 11y + 6}{2} \geq \frac{8\cdot 2\cdot y - 11y + 6}{2} = \frac{5y+6}{2} > y$, damit ist $x$ stets positiv, so wie wir es gewählt haben.
Zu zeigen bleibt, dass es unendlich viele Paare $(n, y)$ gibt, die Gleichung (4) erfüllen. Wir formen (4) äquivalent um zu
$(16y - 11)^2 - 2\cdot(4n+2)^2 = -79$ (5), was man leicht nachrechnen kann.

Wir betrachten nun die ähnliche Gleichung $a^2 - 2 \cdot b^2 = -79$ (6).
Wir zeigen induktiv, dass $a_{m+1} = 17 \cdot a_m + 24 \cdot b_m$ und
$b_{m+1} = 12 \cdot a_m + 17 \cdot b_m$ mit $a_0 = 53$, $b_0 = 38$ und $m \in \mathbb{N}_0$ Lösungen der Gleichung (6) sind:
*Beweis:*
**Induktionsanfang:** Sei $m = 0$. Es gilt $a_0^2 - 2 \cdot b_0^2 = 53^2 - 2 \cdot 38^2$ $= -79$, was man per Hand ausrechnen kann oder mit dem Taschenrechner überprüfen kann.
**Induktionsannahme:** Es sei die Behauptung für $m$ bereits bewiesen, es gelte also $a_m^2 - 2 \cdot b_m^2 = -79$.
**Induktionsschritt:** Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigen wir nun die Behauptung für $(m + 1)$. Zu zeigen ist also, dass $a_{m+1}^2 - 2 \cdot b_{m+1}^2 = -79$ gilt. Es gilt:

$$a_{m+1}^2 - 2 \cdot b_{m+1}^2 = (17 \cdot a_m + 24 \cdot b_m)^2 - 2 \cdot (12 \cdot a_m + 17 \cdot b_m)^2$$

$$= 17^2 \cdot a_m^2 + 2 \cdot 17 \cdot a_m \cdot 24 \cdot b_m + 24^2 \cdot b_m^2 - 2 \cdot 12^2 \cdot a_m^2 - 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot a_m \cdot 17 \cdot b_m$$
$$-2 \cdot 17^2 \cdot b_m^2$$

$$= (17^2 - 2 \cdot 12^2) \cdot a_m^2 + (24^2 - 2 \cdot 17^2) \cdot b_m^2 = a_m^2 - 2 \cdot b_m^2 = -79$$

□

Ferner haben wir $b_{m+1} = 12 \cdot a_m + 17 \cdot b_m \equiv b_m \pmod 4$. Wir erhalten induktiv $b_m \equiv b_0 = 38 \equiv 2 \pmod 4$, also ist $b_m$ insbesondere gerade. Damit erhalten wir wiederum $a_{m+1} = 17 \cdot a_m + 24 \cdot b_m$ $= 17 \cdot a_m + 3 \cdot 8 \cdot b_m \equiv a_m \pmod{16}$. Induktiv erhalten wir also $a_m \equiv a_0 = 53 \equiv 5 \pmod{16}$.
Somit können wir in Gleichung (5) $y = \dfrac{a_m + 11}{16}$ und $n = \dfrac{b_m - 2}{4}$ setzen, womit wir die Gleichung (6) erhalten und damit gezeigt haben, dass die Gleichung (5) unendlich viele Paare $(n, y)$ besitzt, die die Gleichung erfüllen. Somit ist alles gezeigt. □

Frage: Was heißt *heinersch*? :D